SOC
7130

HARVARD UNIVERSITY.

LIBRARY

OF THE

MUSEUM OF COMPARATIVE ZOÖLOGY.

167

Exchange

October 9, 1908.

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

Nec temere, nec timide

TROISIÈME SÉRIE.

TOME IV.

DÉPOTS :

LONDRES, chez Williams et Norgate, Henrietta Str., 14.

PARIS, chez Hermann, libraire, rue de la Sorbonne, 8.

BERLIN, chez Friedländer u. Sohn, Carlstrasse, 11.

BRUXELLES,

HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE.

Rue de Louvain, 112.

NOVEMBRE 1902.

LIBRARY
MUS COMP ZOOLOGY
CAMBRIDGE, MASS.

OCT 9 1908

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

Nec temere, nec timide.

TROISIÈME SÉRIE.

TOME IV.

DÉPOTS :

LONDRES,	PARIS,	BERLIN,
chez Williams et Norgate,	chez Hermann, libraire,	chez Friedländer u. Sohn,
Henrietta Str., 14.	rue de la Sorbonne, 8.	Carlstrasse, 11.

BRUXELLES,

HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES
DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE.

Rue de Louvain, 112.

NOVEMBRE 1902.

TABLE

DES

MÉMOIRES CONTENUS DANS LE TOME IV.

1. Recherches sur l'anatomie des feuilles dans les Renonculacées; par J. Goffart (2e partie).

2. Les milieux homogènes de M. Viola; par G. Cesàro.

3. Calcul du volume d'une forme cristalline quelconque; par G. Cesàro.

4. Exposé élémentaire des principes de saccharimétrie optique; par G. Cesàro et P. Bussy. Avec Appendice par G. Cesàro.

5. Généralisation des formules d'Euler; par G. Cesàro.

6. Les figures similaires dans le plan et dans l'espace; par G. Tarry.

7 Note sur l'hypocycloïde à trois rebroussements; par M. A. Gob.

8 Rectification des épitrochoïdes; par M. A. Gob.

9. Recherches anatomiques sur les feuilles de l'*Ornithogalum caudatum* Ait.; par Hyac. Lonay.

10. Considérations sur le changement de volume que les sels éprouvent en passant de l'état solide à l'état de dissolution; par G. Happart.

LISTE

DES

MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ

(NOVEMBRE 1902).

Bureau.

Président,	M. G. Cesàro.
Vice-Président,	» G. Dewalque.
Secrétaire général,	» C. le Paige.
Trésorier-Bibliothécaire,	» J. Deruyts.

Membres effectifs.

1855 Dewalque, G., professeur émérite à l'université de Liége, membre de l'Académie royale de Belgique.

1860 Gillon, A., professeur émérite à l'université.

1870 Masius, V., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1871 Van Beneden, Éd., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1874 Firket, Ad., chargé de cours à l'université, inspecteur général au corps des mines.

1878 LE PAIGE, C., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1879 JORISSEN, A., professeur à l'université, correspondant de l'Académie royale de Belgique.

1880 NEUBERG, J., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1881 FRAIPONT, J., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1884 DERUYTS, J., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

UBAGHS, P., répétiteur à l'université.

1885 GRAVIS, A., professeur à l'université, correspondant de l'Académie royale de Belgique.

1887 LOHEST, M., professeur à l'université.

DE HEEN, P., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1890 BEAUPAIN, J., docteur en sciences, ingénieur principal au corps des mines.

1897 CESÀRO, G., professeur à l'université, correspondant de l'Académie royale de Belgique.

1898 HUBERT, H., chargé de cours à l'université, ingénieur en chef au corps des mines.

1900 LONAY, H., docteur en sciences, assistant à l'université.

1902 DEHALU, M., docteur en sciences, répétiteur à l'université.

FAIRON, J., docteur en sciences, répétiteur à l'université.

Membres correspondants.

I. — Sciences physiques et mathématiques.

1853 Bède, Em., industriel, à Bruxelles.

1855 Liais, ancien directeur de l'Observatoire de Rio de Janeiro.

1863 Gossage, membre de la Société chimique, à Londres.

1865 Hugueny, professeur, à Strasbourg.
De Colnet d'Huart, conseiller d'État, à Luxembourg.
Dausse, ingénieur en chef des ponts et chaussées, à Paris.
Folie, F., directeur honoraire de l'Observatoire royal de Bruxelles.

1866 Ledent, directeur de l'École des textiles de Verviers.

1867 Barnard, président de l'École des mines, à New-York.

1869 Marié Davy, directeur de l'Observatoire météorologique de Montsouris.

1871 Henry, L., professeur à l'université de Louvain.
Masters, Maxwell T., membre de la Société royale, à Londres.

1872 Vallès, inspecteur honoraire des ponts et chaussées, à Paris.
Garibaldi, professeur à l'université de Gênes.
Kanitz, Dr Aug., professeur à l'université de Klausenbourg.

1873 Darboux, G., membre de l'Institut, à Paris.

1875 Mansion, P., professeur à l'université de Gand.
Michaelis, O., captain, chief of Ordnance, à Saint-Paul, Minn., département de Dakota (États-Unis).
Dewalque, Fr., professeur à l'université de Louvain.

1876 Balfour, Th. G. H., membre de la Société royale, à Londres.

1877 Tissandier, Gaston, rédacteur du journal *la Nature*, à Paris.

1879 Czuber, professeur, à Prague.

1880 Cremona, Luigi, directeur de l'École d'application, à Rome.
Studnička, F., professeur à l'université de Prague.
Van der Mensbrugghe, Gustave, professeur à l'université de Gand.
De Tilly, J., lieutenant général, membre de l'Académie royale de Belgique, à Bruxelles.

1881 Sébert, colonel d'artillerie de la marine française, à Paris.
Angot, A., attaché au bureau central météorologique de France, à Paris.
Wiedemann, G., professeur à l'université de Leipzig.
Kohlrausch, directeur de l'Institut physique de Wurzbourg.
Quincke, professeur à l'université d'Heidelberg.
Guiscardi, professeur à l'université de Naples.
Laisant, C.-A., à Paris.

1882 Mascart, membre de l'Institut, à Paris.

1883 Mittag-Leffler, G., professeur à l'université de Stockholm.
Gomès Teixeira, F., ancien professeur à l'université de Coïmbre.

1885 Schur, Fréd., professeur à l'université de Dorpat.
Picquet, répétiteur à l'École polytechnique, à Paris.
de Longchamps (Gohierre), professeur au lycée Charlemagne, à Paris.
Vaněček, J. S., professeur, à Jičin (Bohême).
Cesàro, E., professeur à l'université, à Naples.

1887 Walras, L., professeur à l'Académie de Lausanne.
Guccia, docteur en sciences, à Palerme.
Wullner, professeur à l'École polytechnique d'Aix-la-Chapelle.
Paalzow, directeur de l'École technique de Berlin.

1888 Ocagne (Maurice d'), professeur à l'École des ponts et chaussées, à Paris.

1898 Gordan, P., professeur à l'université d'Erlangen.
Korteweg, D.-J., professeur à l'université d'Amsterdam.
Lampe, Em., directeur du *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, professeur à Berlin.
Mathias, Em., professeur à l'université de Toulouse.
Brocard, H., ancien officier du génie, à Bar-le-Duc.

II. — Sciences naturelles.

1853 Waterhouse, Ch., conservateur au Musée britannique, à Londres.

1854 Drouët, H., naturaliste, à Dijon.
Lucas, H., aide-naturaliste au Museum d'histoire naturelle, à Paris.

1855 Geinitz, H. B., professeur à l'École polytechnique, à Dresde.

1864 Thomson, J., membre de la Société entomologique de France, à Paris.

1865 Le Jolis, archiviste perpétuel de la Société des sciences naturelles de Cherbourg.
Hamilton, membre de la Société géologique de Londres.
De Borre, A., ancien conservateur au Musée royal d'histoire naturelle de Bruxelles, à Genève.

1866 Rodriguez, directeur du Musée zoologique de Guatémala.

1867 Gosselet, J., professeur à la faculté des sciences de Lille.
Radoszkoffski, président de la Société entomologique de Saint-Pétersbourg.

1869 Simon, E., naturaliste, à Paris.

1870 Trautschold, professeur, à Carlsruhe.
Malaise, C., professeur émérite à l'Institut agronomique de Gembloux.

1871 Thomson, James, vice-président de la Société géologique de Glasgow.

Capellini (commandeur G.), professeur de géologie à l'université de Bologne.

1873 Clos, directeur du Jardin des Plantes, à Toulouse.

Hall, James, paléontologiste de l'État, à Albany.

Whitney, J. D., géologue de l'État, directeur du *Geological Survey* de Californie.

Glaziou, botaniste, à Rio de Janeiro.

De Carvalho (Pedro Alphonso), docteur en médecine, directeur de l'Hôpital de la Miséricorde, à Rio de Janeiro.

Moreno, F. P., paléontologiste, à Buenos-Ayres.

Areschoug, professeur adjoint à l'université de Lund.

1874 Gegenbauer, professeur à l'université de Heidelberg.

Häckel, professeur à l'université de Iéna.

Waldeyer, professeur à l'université de Berlin.

1875 Eimer, professeur à l'université de Tubingue.

De la Valette Saint-George, professeur à l'université de Bonn.

Ray-Lankester, professeur à l'université de Londres.

Packard, professeur à l'université de Salem.

Flemming, W., professeur à l'université de Kiel.

Plateau, F., professeur à l'université de Gand.

1876 Balfour, I. B., professeur de botanique à l'université, à Oxford.

1877 Mac Lachlan, Rob., membre de la Société entomologique, à Londres.

1878 Hertwig, R., professeur à l'université de Munich.

Strasburger, professeur à l'université de Bonn.

Brongniart, Charles, à Paris.

1879 Wetterby, professeur à l'université de Cincinnati.

Bolivar, I., professeur, à Madrid.

1879 Ritsema, conservateur au Musée royal d'histoire naturelle, à Leyde.

Renard, Alphonse, professeur à l'université de Gand.

1881 Retzius, G., professeur à l'École de médecine de Stockholm.

Taramelli, professeur à l'université de Pavie.

Gestro, Dr R., conservateur au Musée d'histoire naturelle de Gênes.

Salvadori (comte Th.), professeur à l'université de Turin.

1883 Hull, Edward, directeur du *Geological Survey* d'Irlande.

Sandberger, Fridolin, professeur à l'université de Wurzbourg.

1884 Trinchese, professeur à l'université de Naples.

1898 Crépin, Fr., membre de l'Académie royale de Belgique, à Bruxelles.

Agassiz, Alexandre, à Cambridge (Mass.).

Bertrand, C.-E., professeur de botanique à la Faculté des sciences de Lille.

Blanchard, Raphaël, assistant au Museum d'histoire naturelle, à Paris.

LISTE

DES

SOCIÉTÉS SAVANTES, REVUES, ETC.,

AVEC LESQUELLES

LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE LIÉGE

échange ses publications.

BELGIQUE.

Bruxelles. — *Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.*
Observatoire royal.
Société entomologique de Belgique.
Société malacologique de Belgique.
Société royale belge de géographie.
Société belge de microscopie.
Musée royal d'histoire naturelle.

Liége. — *Société géologique.*

Mons. — *Société des sciences, des lettres et des beaux-arts du Hainaut.*

Gand. — *Mathesis,* directeurs : MM. P. Mansion et J. Neuberg.

ALLEMAGNE.

Berlin. — *Königliche Akademie der Wissenschaften.*
Deutsche geologische Gesellschaft.
Entomologischer Verein.
Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, directeur : M. Lampe (Kurfürstenstr., 139).

Bonn. — *Naturhistorischer Verein der Preussischen Rheinlande und Westphalens.*

Breslau. — *Schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur.*

Colmar. — *Société d'histoire naturelle.*

Erlangen. — *Physikalisch-medicinische Societät.*

Francfort. — *Senckenbergische naturwissenschaftliche Gesellschaft.*

Fribourg. — *Naturforschende Gesellschaft.*

Giessen. — *Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde.*

Görlitz. — *Naturforschende Gesellschaft.*
Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften.

Göttingue. — *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften und Georg-August-Universität.*

Halle. — *Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen.*
Naturforschende Gesellschaft.
Kaiserliche Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher.

Kiel. — *Naturwissenschaftlicher Verein.*

Königsberg. — *Königliche physikalisch-ökonomische Gesellschaft.*

Landshut. — *Botanischer Verein.*

Leipzig. — *Naturforschende Gesellschaft.*

Metz. — *Académie des lettres, sciences, arts et agriculture.*

Munich. — *Königliche bayerische Akademie der Wissenschaften.*
Königliche Sternwarte.

Munster. — *Westfälischer Provincial-Verein für Wissenschaften und Kunst.*

Offenbach. — *Offenbacher Verein für Naturkunde.*

Stettin. — *Entomologischer Verein.*

Stuttgart. — *Verein für vaterländische Naturkunde in Würtemberg.*

Wiesbaden. — *Nassauischer Verein für Naturkunde.*

Wurzbourg. — *Physikalisch-medicinische Gesellschaft in Würzburg.*

Zwickau. — *Verein für Naturkunde.*

AUTRICHE-HONGRIE.

Agram. — *Académie Sudo-Slave des sciences.*

Cracovie. — *Académie des sciences.*

Hermannstadt. — *Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften.*

Innspruck. — *Naturwissenschaftlich-medicinischer Verein.*

Prague. — *Königlich böhmische Gesellschaft der Wissenschaften.*
Kaiserlich-Königliche Sternwarte.
Ceske Akademie Cisare Frantiska Josepha.

Trieste. — *Società adriatica di Scienzi naturali.*

Vienne. — *Kaiserliche Akademie der Wissenschaften.*
Kaiserlich-Königliche zoologisch-botanische Gesellschaft.
Kaiserlich-Königliche geologische Reichsanstalt.
Monatshefte für Mathematik und Physik, rédacteurs : MM. Escherich et Gegenbauer, professeurs à l'université.

ESPAGNE.

Madrid. — *Real Academia de Ciencias.*

FRANCE.

Agen. — *Société d'agriculture, sciences et arts.*

Béziers. — *Société d'étude des sciences naturelles.*

Bordeaux. — *Académie des sciences, belles-lettres et arts.*
Société linnéenne.
Société des sciences physiques et naturelles.

Caen. — *Société linnéenne de Normandie.*

Cherbourg. — *Société des sciences naturelles.*

Dijon. — *Académie des sciences.*

Lille. — *Société des sciences, de l'agriculture et des arts.*

Lyon. — *Académie des sciences.*
Société d'agriculture.
Société linnéenne.
Université.

Marseille. — *Faculté des Sciences.*

Montpellier. — *Académie des sciences et lettres.*

Nancy. — *Société des sciences (ancienne Société des sciences naturelles de Strasbourg).*

Nantes. — *Société des sciences naturelles de l'Ouest de la France.*

Paris. — *Société Philomatique.*
Muséum d'histoire naturelle.
Société mathématique de France.
École polytechnique.

Rouen. — *Société des amis des sciences naturelles.*
Académie des sciences.

Toulouse. — *Académie des sciences.*
Société des sciences physiques et naturelles.
Faculté des Sciences.

Troyes. — *Société académique de l'Aube.*

GRANDE-BRETAGNE ET IRLANDE.

Dublin. — *Royal Irish Academy.*
Royal Society.

Édimbourg. — *Geological Society.*
Mathematical Society.

Glasgow. — *Geological Society.*
Natural history Society.
Philosophical Society.

Londres. — *Geological Society.*
Linnean Society.
Royal Society.

Manchester. — *Litterary and philosophical Society.*

ITALIE.

Bologne. — *Accademia delle Scienze.*

Catane. — *Accademia gioenia di scienze naturali.*

Florence. — *Institut supérieur.*

Gênes. — *Osservatorio della R. Universita.*

Modène. — *Societa dei naturalisti.*

Naples. — *Societa Reale.*

Palerme. — *Societa di scienze naturali e economiche.*
Circolo matematico.

Pise. — *Societa di scienze naturali.*
Nuovo Cimento, rédacteurs : MM. Felici, Batelli et Volterra.

Rome. — *Reale Accademia dei Lincei.*
Accademia pontificia de' Nuovi Lincei.
R. Comitato geologico d'Italia.

Turin. — *Reale Academia delle Scienze.*

LUXEMBOURG.

Luxembourg. — *Institut royal grand-ducal, section des sciences naturelles et mathématiques.*
Société botanique du grand-duché de Luxembourg.

NÉERLANDE.

Amsterdam. — *Koninklijke Academie van wetenschappen.*
Société mathématique.

Delft. — *École polytechnique.*

Harlem. — *Société hollandaise des sciences.*
Musée Teyler.

Rotterdam. — *Bataafsch Genootschap der proefondervindelijke wijsbegeerte.*

PORTUGAL.

Coïmbre. — *Journal des sciences mathématiques et astronomiques*, rédacteur : M. Gomès Teixeira.

Lisbonne. — *Académie des sciences.*

RUSSIE.

Helsingfors. — *Société des sciences de Finlande.*

Kazan. — *Société physico-mathématique.*

Kharkoff. — *Société mathématique.*

Juriew. — *Université.*

Moscou. — *Société impériale des naturalistes.*

Saint-Pétersbourg. — *Académie impériale des sciences.*
Archives des sciences biologiques.
Société d'archéologie et de numismatique.
Société entomologique.

SUÈDE ET NORVÈGE.

Bergen. — *Museum.*

Christiania. — *Kongelige Frederiks Universitet.*

Göteborg. — *Kongl. Vetenskaps och Vitterhetssamhälle.*

Stavanger. — *Museum.*

Stockholm. — *Académie royale des sciences.*
Nordist medicinskt Arkiv, directeur : Dr Axel Key.
Entomologiska föreningen, 94, Drottninggatan.
Acta mathematica, rédacteur : M. Mittag-Leffler.

Throndhjem. — *K. Norske Videnskabers Selskabs.*

Upsal. — *Société royale des Sciences.*

DANEMARK.

Copenhague. — *Tidskrift for Mathematik :* Drs Juel et Foldberg (Romersgade, 9).
Académie royale des sciences.

SUISSE.

Berne. — *Naturforschende Gesellschaft.*
Société helvétique des sciences naturelles.

Neuchâtel. — *Societé des sciences naturelles.*

Schaffhouse. — *Naturforschende Gesellschaft.*

Zurich. — *Naturforschende Gesellschaft.*

AMÉRIQUE.

ÉTATS-UNIS.

Austin. — *Texas Academy of sciences.*
Baltimore. — *American Journal of mathematics. (Johns Hopkins University.)*
Boston. — *American Academy of arts and sciences.*
Society of natural History.
Halifax. — *Nova Scotian Institute of Natural Science.*
Madison. — *Wisconsin Academy of sciences, letters and arts.*
New-Haven. — *Connecticut Academy of arts and sciences.*
New-York. — *Academy of sciences.*
Museum of natural history.
American Mathematical Society.
Philadelphie. — *Academy of natural sciences.*
American philosophical Society.
Wagner Free Institute of sciences.
Portland. — *Natural History Society.*
Rochester. — *Academy of sciences.*
Saint-Louis, Mo. — *Botanical Garden.*
Salem. — *Essex Institute.*
American Association for advancement of sciences.
San-Francisco. — *Californian Academy of sciences.*
Washington. — *Smithsonian Institution.*
American Monthly Microscopical Journal.

CANADA.

Ottawa. — *Geological Survey of Canada.*
Commission de géologie et d'histoire naturelle du Canada.
Toronto. — *Canadian Institute.*

CHILI.

Santiago. — *Société scientifique du Chili.*

MEXIQUE.

Mexico. — *Société Antonio Alzate.*
Observatoire météorologique central.

Tacubaya. — *Observatoire national.*

RÉPUBLIQUE ARGENTINE.

Buenos-Ayres. — *Universidad.*

ASIE.

—

INDES ANGLAISES.

Calcutta. — *Asiatic Society of Bengal.*

INDES HOLLANDAISES.

Batavia. — *Koninklijke natuurkundige vereeniging in Nederlandsch Indië.*

SIBÉRIE.

Irkutsk. — *Ostsibirische Abtheilung der K. Russischen geographischen Gesellschaft.*

AUSTRALIE.

Adelaïde. — *Australian Association for advancement of science.*
Royal Society of South Australia.

Hobart-Town. — *Tasmanian Society of natural sciences.*

Melbourne. — *Observatoire.*

Sydney. — *Linnean Society.*
Royal Society of New South Wales.

RECHERCHES

SUR

L'ANATOMIE DES FEUILLES

DANS LES

RENONCULACÉES

PAR

JULES GOFFART

DOCTEUR EN SCIENCES NATURELLES
LAURÉAT DU CONCOURS UNIVERSITAIRE

Une partie du mémoire de M. J. Goffart a paru dans le tome III avec toutes les planches. Nous donnons ici la suite de ce travail.

(N. D. L. R.)

HUITIÈME GROUPE.

GENRE RANUNCULUS.

Les nombreuses espèces de ce genre peuvent se rattacher, par l'architecture de leur feuille végétative principale, aux différents groupes étudiés précédemment (1) : les *R. Lingua* L., *Flammula* L., *amplexicaulis* L. ont un limbe monacrone; les *R. aquatilis* L., *divaricatus* Schrk., *fluitans* Lmk. ont un limbe triacrone; les *R. âcris* L., *lanuginosus* L., *platanifolius* L. ont un limbe polacrone (2).

Pour l'intelligence de ce genre important et complexe, j'ai cru devoir d'abord faire l'étude approfondie d'un type de chacune de ces trois catégories.

I. — LIMBE MONACRONE.

Type : Ranunculus Lingua L.

En juillet, la pousse qui est insérée sur un rhizome submergé atteint parfois 2 mètres d'élévation; elle porte des feuilles végétatives et des bractées distiques.

Les bourgeons de remplacement se forment aux nœuds du rhizome. Ils se développent en automne ou au printemps suivant : préfeuille, quatre à six feuilles pérulaires, un nombre variable de feuilles végétatives nageantes qui apparaissent ou bien toutes en automne, ou toutes au printemps, ou partie en automne et partie au printemps. L'hivernage a lieu, dans tous les cas, sous l'eau.

FEUILLE VÉGÉTATIVE AÉRIENNE.

***A.* Organogénie.** — La feuille primordiale est un manchon fendu, de 360°, qui se relève bientôt au point M. Les bords de la fente grandissent et se recouvrent l'un et l'autre, surtout dans le

(1) Certains auteurs ont voulu faire dériver toutes les Renonculacées du genre *Ranunculus*.

(2) D'autres espèces, dont je n'ai pu me procurer des représentants assez complets, se rattachent nettement au groupe de la Populage, d'autres au groupe de l'Hellébore.

bas (pl. XI, fig. 312). La feuille est alors enroulée en cornet (fig. 313).

Le faisceau M apparait et se différencie le premier, puis successivement les faisceaux L, *m*, *m'*, *m''*.

B. Feuille adulte.

Caractères extérieurs. — Elle se compose d'une gaine ailée de 360°, d'un pétiole comprimé et canaliculé, d'un limbe ensiforme, lancéolé, aigu, à bords denticulés ou entiers. Les limites de séparation entre gaine, pétiole et limbe ne peuvent être déterminées d'une façon précise.

Parcours. — La feuille reçoit neuf faisceaux (fig. 314) :

m'' *m'* *m* L M L *m* *m'* *m''*

qui se disposent sur un seul arc dans le pétiole (fig. 315) et qui, sur la coupe transversale, sont rangés par ordre de taille dans la gaine, le pétiole et le limbe.

Les faisceaux M et L parcourent la feuille presque en droite ligne, depuis la base jusqu'au sommet, et ne se réunissent que tout à l'extrémité de la feuille. Les L restent dans la nervure principale jusque vers le haut de la feuille, tandis que les *m* s'écartent du plan médian foliaire dès la base du limbe pour ne s'en rapprocher qu'au sommet. Les faisceaux *m'* et *m''* aboutissent, à des niveaux différents, dans les bords du limbe.

Histologie :

a) *Pétiole.* Le faisceau M a une section transversale en forme d'ellipse allongée (fig. 316), la zone cambiale est à peine arquée; deux massifs de fibres sclérifiées.

Tfi. très lacuneux; grandes cellules à parois minces; une cavité centrale.

Épiderme à cuticule lisse; stomates; poils.

b) *Limbe.* Mésophylle bifacial (fig. 317). Parenchyme palissadique unisérié se composant de grandes cellules plus ou moins allongées, avec méats, souvent renflées aux extrémités mais non

rameuses, irrégulières vues de face (fig. 318). Parenchyme spongieux à grandes cellules ramifiées.

Épiderme équifacial, cellules très sinueuses. Cuticule assez épaisse, marquée de fines granulations cireuses.

Stomates saillants, également répartis sur les deux faces.

Poils uniformes, allongés, cylindriques, effilés au sommet, à membrane épaisse (fig. 317).

FEUILLE VÉGÉTATIVE NAGEANTE.

C'est la feuille qualifiée primaire par J. Massart (**34**). On en compte ordinairement six à dix. Ce sont les premières feuilles de la pousse au-dessus de la pérule. Elles sont aussi distiques.

A l'état jeune, le limbe est très épais et d'abord creusé en cuiller (pl XII, fig. 319), avec le sommet infléchi (fig. 320). Puis ce limbe s'enroule en cornet comme dans la feuille aérienne (fig. 321).

A l'état adulte (fig. 322), la feuille se compose d'une gaine ailée avec insertion de 360°, d'un pétiole arrondi, subcylindrique (fig. 323), et d'un limbe oblong, subcordé, obscurément denté. Les trois régions sont nettement distinctes.

Parcours. — La feuille reçoit généralement cinq faisceaux :

m L M L *m*,

qui, dans le pétiole, n'échangent que très rarement de fines anastomoses obliques.

A la base du limbe, il y a entre eux des arcs transversaux qui les relient et forment une sorte de « nœud ».

Histologie :

a) *Pétiole.* Ni sclérenchyme, ni assise à plissements autour des faisceaux. Cinq cavités dans le *Tf.* (fig. 323).

b) *Limbe.* Mésophylle homogène (fig. 324) : toutes les cellules sont globuleuses, irrégulières ou isodiamétriques sur la section transversale, et irrégulières vues de face sous les épidermes.

Épiderme équifacial comme dans la feuille végétative aérienne.

Stomates sur les deux faces, mais très rares à la face externe (1).

Poils nuls.

FEUILLES BRACTÉALES.

Les supérieures sont sessiles et ne reçoivent que trois faisceaux. Comme les feuilles aériennes et les feuilles nageantes, elles possèdent, à l'extrémité des dents, des organes de sudation (2).

FEUILLES PÉRULAIRES.

La préfeuille n'est qu'une gaine triangulaire, à trois faisceaux, orientés comme dans les préfeuilles étudiées précédemment.

Les feuilles pérulaires se composent d'une gaine surmontée d'un petit limbe creusé en cuiller rappelant le stade jeune de la feuille nageante (fig. 320). Toutes sont distiques.

R. amplexicaulis L. — **R. Flammula** L. — **R. gramineus** L.

Les feuilles de ces trois espèces sont, comme celles de *R. Lingua*, caractérisées par :

1° Une gaine ailée avec insertion de 360°, un pétiole canaliculé, un limbe plus ou moins longuement lancéolé à bords entiers ou à peine dentés;

(1) Dans les parterres du Jardin botanique de Liége, j'ai recueilli ces feuilles nageantes devenues aériennes, faute d'eau dans les bassins. J'y ai observé certaines particularités. Leur limbe ne dépasse guère les dimensions d'une pièce de 50 centimes. Dans le pétiole, les faisceaux ont des fibres sclérifiées, et les éléments libéroligneux sont beaucoup plus nombreux. L'hypoderme est collenchymateux.

Dans le limbe, le mésophylle rappelle beaucoup celui de la feuille végétative aérienne et l'épiderme externe possède autant de stomates que l'épiderme interne.

(2) Voir la note (3) au bas de la page 76 du présent Mémoire.

2° L'absence de toute séparation morphologique, tant interne qu'externe, bien précise, entre les trois régions de la feuille (¹);

3° La disposition des faisceaux dans le pétiole où ils sont toujours rangés en un seul arc vers la face externe (fig. 325, 326 et 327);

4° La convergence des faisceaux principaux qui se réunissent au sommet du limbe.

Ces trois espèces reçoivent de la tige de sept à onze faisceaux, parmi lesquels un intermédiaire :

m L *i* M *i* L *m*

m' *m* L *i* M *i* L *m* *m'*, etc.,

tandis que ceux du *R. Lingua* forment une série décroissante du médian au marginal extrême :

m'' *m'* *m* L M L *m* *m'* *m''*.

Il y a toujours des stomates sur les deux faces.

Comme caractères spéciaux à chacune d'elles, signalons :

R. Flammula. Deux massifs de sclérenchyme (fig. 325) dans le pétiole, qui se réunissent pour former un étui autour de chaque faisceau dans la gaine.

Mésophylle bifacial : une série de palissades oblongues, simples et régulières, peu serrées.

Épiderme subéquifacial, à cellules peu sinueuses; les parois latérales des cellules sont épaissies et ponctuées.

Poils comme *R. Lingua.*

R. amplexicaulis. Les bords de la gaine sont soudés entre eux jusqu'à un certain niveau; la gaine de la feuille primordiale est donc ici un manchon complet.

Dans la gaine, les faisceaux deviennent très nombreux, une cinquantaine parfois.

(¹) Le *R. Flammula* possède deux catégories de feuilles comme le *R. Lingua.*

Un étui sclérenchymateux autour de chaque faisceau; zone cambiale bien arquée (fig. 326).

Mésophylle et poils comme *R. Flammula.*

Épiderme bifacial : cellules irrégulières à la face interne, sinueuses à la face externe.

R. gramineus. Assez souvent un étui sclérenchymateux autour de chaque faisceau dans le pétiole (fig. 327).

Dans le limbe, les faisceaux avec les deux massifs de sclérenchyme ne sont séparés des épidermes que par une seule assise de cellules (fig. 328). Le mésophylle est homogène à cellules globuleuses ou presque homogène; dans ce dernier cas, il existe une assise sous-épidermique que l'on peut considérer comme parenchyme palissadique, et le mésophylle devient alors légèrement bifacial.

Épiderme équifacial à petites cellules polyédriques ou irrégulières, à peine sinueuses.

Je n'ai pas vu de poils.

II. — LIMBE TRIACRONE.

Type : Ranunculus aquatilis L.

La plante (1), en avril, est dressée au fond de l'eau (fig. 329). Elle porte de six à dix feuilles végétatives submergées, en série progressive, puis se termine par une fleur; l'angle phyllotaxique est égal à $^2/_5$. Le bourgeon axillaire de la feuille supérieure (feuille bractéale) continue la tige, qui est donc sympodique à partir de cette hauteur et ainsi dans toute sa région florifère.

Les bourgeons axillaires des feuilles de la série progressive peuvent se développer en rameaux qui, généralement, sont aussi d'abord monopodiques, puis sympodiques.

(1) Je suis bien porté à croire que cette espèce est annuelle et non vivace : Je n'ai pas trouvé jusque maintenant d'organe d'hivernage. La figure 329 montre un axe hypocotylé bien caractérisé.

FEUILLE VÉGÉTATIVE.

A. **Organogénie.** — Feuille primordiale avec gaine de 360°, fendue. Trois mamelons L, M, L, et deux saillies qui deviendront les auricules, comme à l'*Anemone nemorosa* (1).

B. **Feuille adulte.**

Caractères extérieurs. — Gaine de 360°, ailée et auriculée, pétiole cylindrique, limbe découpé en nombreuses lanières cylindriques supportées par trois rachis primaires inégaux; le segment médian est moins développé que les segments latéraux.

Parcours. — La feuille reçoit trois faisceaux (fig. 330) :

L M L

qui parcourent la gaine et le pétiole en n'échangeant que de très rares anastomoses obliques (fig. 330 et 331). Les auricules ne sont pas vascularisées.

A la base du limbe, le M se trifurque et le segment médian ne reçoit, dans les cas ordinaires, que la branche médiane. Les segments L reçoivent trois faisceaux qui persistent jusqu'à la deuxième trifurcation. Au delà, il n'existe plus qu'un seul faisceau.

Histologie :

a) *Pétiole.* Le faisceau M (fig. 332) renferme une lacune à la place du B_1 (2), la zone cambiale est très peu active et non arquée.

Pas d'éléments sclérifiés; une assise à plissements bien distincte.

Tf. lacuneux sans cavité centrale.

Épiderme chlorophyllien, faiblement cutinisé, sans poils ni stomates.

(1) Les renseignements fournis par M. Massart (34, p. 218, et pl IV, fig. 59 et 60) s'appliquent à l'organogénie des feuilles bractéales nageantes non laciniées : il se forme, de chaque côté du mamelon M, un mamelon L qui se dichotomise, et le limbe n'est pas, à proprement parler, pentacrone.

(2) Cette lacune n'existe généralement pas dans le bas et le haut du pétiole; elle manque complètement dans les faisceaux L.

b) *Gaine.* Elle est réduite dans les régions marginales et les auricules, aux deux épidermes juxtaposés. Sur la face externe des auricules, de nombreux poils longs, cylindriques, effilés, grêles, à membrane mince.

c) *Limbe.* Les lanières ont une section circulaire (fig. 333), montrant au centre un faisceau à éléments peu nombreux, un mésophylle homogène, presque sans méats, avec corps chlorophylliens très peu nombreux.

Épiderme à cellules polyédriques (fig. 334), subquadrangulaires sur leur face externe, riches en chlorophylle.

Stomates nuls (1).

Poils au nombre de quatre à six, localisés à l'extrémité des lanières; ils sont cylindriques, effilés, peu allongés, hyalins, membrane mince.

FEUILLES BRACTÉALES.

Sur un même pied, elles sont beaucoup plus nombreuses que les feuilles végétatives. Elles sont *submergées* ou *nageantes.*

Les bractées submergées sont lacinées, à pétiole court ou nul, à auricules très développées. Pour le reste, elles ne diffèrent pas des feuilles végétatives.

Les bractées nageantes possèdent une gaine analogue à celle des autres bractées, un pétiole subcylindrique distinct, un limbe (fig. 335) non lacinié, large, à trois segments sessiles et crénelés, libres ou concrescents à la base, le médian moins développé que les deux latéraux qui sont plus ou moins profondément bilobés.

Le faisceau L se bifurque en deux branches égales dès la base

(1) On trouve cependant parfois quelques stomates à la face supérieure des lanières et uniquement à la pointe. E. Mer explique ce fait par une influence héréditaire : « L'extrémité de ces feuilles se trouvant plus rapprochée de la surface de l'eau et pouvant même fréquemment en sortir, possède un caractère plus aérien que tout le reste de l'organe ». Cf. *Bulletin de la Soc. bot de France,* 1886, t. XXXIII, p. 125.

du limbe, formant ainsi les nervures des deux lobes du segment latéral.

Le mésophylle devient nettement bifacial (fig. 336), avec palissades simples, bien caractérisées et mésophylle spongieux à cellules ramifiées.

Épiderme bifacial, cellules presque polyédriques à la face interne (fig. 337), sinueuses à la face externe (fig. 338).

Stomates à la face interne seulement; leurs ostioles sont orientés suivant la direction des nervures principales.

Poils à la face externe, nombreux, allongés, cylindriques, effilés, à membrane épaisse, avec cellules circumpilaires disposées en rosace.

Remarque. — Costantin fait observer (18) que, dans une eau profonde, toutes les feuilles bractéales sont laciniées. D'autre part, si une bractée laciniée se développe accidentellement dans l'air, les dichotomies sont moins nombreuses, les lanières plus courtes; de plus, celles-ci s'aplatissent et leur section devient elliptique. En même temps, il se produit immédiatement une rangée de cellules palissadiques à la face interne et le reste du mésophylle forme un parenchyme spongieux. Des stomates apparaissent sur les deux faces.

M. Askenasy (1) signale à l'extrémité des feuilles submergées et laciniées des stomates moins grands que sur les feuilles aériennes, d'une existence éphémère et qui sont par conséquent à rechercher sur les feuilles jeunes. Ils existeraient aussi sur la face interne des cotylédons submergés.

R. divaricatus Schrk. — **R. fluitans** Lmk.

Ces deux espèces aquatiques présentent une remarquable analogie avec le *R. aquatilis*.

(1) *Ueber den Einfluss des Wachstumsmediums auf die Gestalt der Pflanzen*, in Bot. Zeit., 1870.

Toutes trois sont caractérisées par :

1° Région florifère sympodique;

2° Gaine auriculée, pétiole cylindrique ou aplati, jamais canaliculé, limbe triacrone, à segments rachidés, découpés en lanières capillaires. Le segment médian est toujours moins développé et plus courtement rachidé que les segments latéraux;

3° Parcours et caractères histologiques comme au *R. aquatilis*.

Remarquons que chez *R. divaricatus*, du moins sur les individus que j'ai observés, existaient de nombreux poils raides, courts, cylindriques, aigus, à membrane épaisse, répandus sur la gaine, le pétiole, la moitié inférieure du limbe et le sommet des lanières.

Je n'ai pas trouvé de caractère morphologique autre que celui résultant de l'existence des poils, pouvant expliquer la « divarication » des découpures du limbe.

Chez *R. fluitans*, je n'ai observé que deux à quatre poils courts, raides, cylindriques, aigus, exclusivement localisés au sommet des lanières comme chez *R. aquatilis*. Ces poils finissent généralement par tomber quand la feuille est adulte.

D'autres Renoncules à feuilles triacrones seront étudiées dans le paragraphe suivant; elles présentent des affinités plus étroites avec les Renoncules à feuilles polacrones.

III. — LIMBE POLACRONE.

Type : Ranunculus âcris L.

La pousse florifère, en mai-juin, porte une quinzaine de feuilles végétatives, à divergence $^2/_5$, le plus grand nombre à insertion souterraine; quelques-unes à insertion aérienne; plus un certain nombre de bractées.

Pendant et après la floraison, sur la tige souterraine et sous les feuilles les plus inférieures, on observe des bourgeons de remplacement qui développent leur pérule et une rosette de feuilles végétatives; ils s'affranchissent de la tige mère en produisant des racines adventives. L'ensemble forme une souche.

L'hiver arrête la production des feuilles qui recommencera au printemps. Donc, deux foliaisons sur la même pousse interrompue par les froids, sans organes spéciaux pour l'hivernage.

FEUILLE VÉGÉTATIVE.

A. **Organogénie.** — Cinq mamelons primaires, en ordre basipète, se différenciant dans une feuille primordiale dont la gaine fendue a une insertion de 360°. Comme chez Aconit Napel.

B. **Feuille adulte.**

Caractères extérieurs. — Gaine longuement ailée, légèrement auriculée; pétiole cylindrique, canaliculé ou non, parfois aplati; limbe polacrone à segments sessiles, parfois un peu concrescents à la base, paucilobés (fig. 340) ou multifides (fig. 341), à contour subpentagonal. Varie beaucoup quant à la villosité et aux découpures du limbe.

Parcours. — La feuille reçoit le plus souvent neuf faisceaux :

$$m' \quad m \quad L \quad i \quad M \quad i \quad L \quad m \quad m'.$$

Dans la gaine, ils sont rangés sur un seul arc vers la face externe, mais dans le pétiole, les marginaux extrêmes se placent, à la suite d'un pivotement, à la face interne.

Dans toute la longueur du pétiole, ils échangent entre eux de fines anastomoses obliques.

A la base du limbe (fig. 343), le M se trifurque, les L se bifurquent. Ceux-ci, renforcés, vont dans le segment latéral tandis que les faisceaux *m*, aussi renforcés, constituent les faisceaux principaux du segment marginal.

Histologie :

a) *Pétiole.* Dans le faisceau M (fig. 344), les éléments de B_1 sont disséminés parmi les fibres primitives non différenciées, mais qui deviennent assez souvent collenchymateuses; les plus larges vaisseaux du B_2 sont sur les côtés du faisceau; zone cambiale arquée; liber en un groupe arrondi; un massif de fibres

sclérifiées extralibériennes. Autour du bois, une assise à plissements qui peut être remplacée par un arc sclérifié intraligneux.

Tf. avec cavité centrale.

Épiderme à cuticule épaisse et fortement striée. Stomates et poils.

b) *Limbe.* Mésophylle bifacial (fig. 345) : parenchyme palissadique unisérié à cellules cylindriques assez allongées, simples, serrées, mais séparées par d'étroits méats; parenchyme spongieux formé de cellules ramifiées.

Épiderme bifacial : cellules irrégulières ou polyédriques à la face interne, sinueuses à la face externe. Cuticule mince et lisse.

Stomates saillants, rares à la face interne. Les cellules péristomatiques pénètrent sous les cellules de bordure.

Poils nombreux, persistants, allongés, cylindriques, effilés, à membrane épaisse, soulevés sur un piédestal par les cellules circumpilaires, surtout sur le pétiole.

FEUILLES BRACTÉALES.

Elles forment une série régressive qui se simplifie rapidement jusqu'à la petite bractée supérieure, longue de 1 à 2 millimètres et qui ne reçoit plus qu'un seul faisceau.

Elles n'offrent rien d'important à signaler.

FEUILLES PÉRULAIRES.

Ce sont des feuilles végétatives à gaine bien développée et dont le limbe est arrêté dans son développement dès les premiers stades.

La préfeuille possède trois mamelons et un pétiole à peine distinct (fig. 346). Elle est orientée comme les autres préfeuilles étudiées précédemment : la fente de la gaine est du côté opposé à la tige (fig. 347).

Les feuilles pérulaires, en nombre variable (3 à 6), forment une série progressive.

J'ai examiné les espèces suivantes :

R. aconitifolius L.; *R. arvensis* L.; *R. auricomus* L.; *R. bulbosus* L.; *R. hederaceus* L.; *R. lanuginosus* L.; *R. muricatus* L.; *R. nemorosus* DC.; *R. parviflorus* L.; *R. platanifolius* L.; *R. repens* L.; *R. sardous* Crantz; *R. sceleratus* L.; *R. tuberosus* Lapeyr.

Caractères extérieurs. — Toutes possèdent une gaine ailée (fig. 348 et 349), à insertion de 360°, presque toujours auriculée, à auricules plus ou moins développées.

Bien que je n'aie pas vu d'auricules chez *R. arvensis* (fig. 350), je crois néanmoins que l'on peut établir comme règle générale la présence d'auricules sur la gaine.

Le pétiole, souvent canaliculé, est aplati ou subcylindrique chez : *R. repens* (fig. 351); *R. sceleratus* (fig. 352); *R. sardous* (fig. 353); *R. muricatus* (fig. 354); *R. bulbosus* (fig. 355); *R. arvensis* (fig. 356); *R. parviflorus* (fig 357); *R. auricomus* (fig. 358); *R. nemorosus* (fig. 359); simplement subcylindrique chez : *R. aconitifolius* (fig. 360); *R. hederaceus* (fig. 361); parfaitement cylindrique au contraire chez : *R. lanuginosus* (fig. 362); *R. platanifolius* (fig. 363); *R. tuberosus* (fig. 364).

Le limbe est polacrone à 5-7 segments plus ou moins concrescents à la base chez : *R. platanifolius*, *R. lanuginosus* (fig 365), *R. aconitifolius*, *R. nemorosus* (fig. 366 et 367); il est triacrone à segments concrescents chez : *R. parviflorus*, *R. muricatus* (fig. 368), *R. auricomus* (fig. 369); triacrone à segments non concrescents, mais au contraire rachidés, les deux latéraux parfois sessiles et le médian toujours plus longuement rachidé que les autres : *R. bulbosus* (fig. 370), *R. sardous* (fig. 371 et 372), *R. repens* (fig. 373), *R. arvensis* (fig. 374).

Enfin, il peut y avoir des cas où le limbe soit tantôt triacrone, tantôt polacrone : *R. sceleratus*, *R. hederaceus* (fig. 375) avec des lobes superficiels ou profonds.

Le *R. tuberosus* peut avoir ses segments rachidés (fig. 376) ou sessiles (fig. 377).

Les découpures du limbe, lobes ou dents, sont en général

assez variables, même dans une espèce donnée (fig. 366 et 367, fig. 371 et 372).

Parcours. — Plusieurs espèces reçoivent trois faisceaux, beaucoup plus rarement cinq :

m L M L *m*.

D'autres de cinq à neuf, généralement sept :

m L *i* M *i* L *m*.

Ce sont *R. bulbosus, sardous, nemorosus.*

Il en est qui reçoivent de onze à quinze faisceaux : *R. tuberosus, lanuginosus, aconitifolius.*

Enfin, le nombre peut s'élever jusqu'à trente et au delà chez *R. platanifolius.*

Ces faisceaux parcourent la gaine ou tout au moins sa moitié inférieure, rangés sur un seul arc. Dans le haut de la gaine, les marginaux extrêmes tournent sur eux-mêmes et se placent, dans le pétiole, à la face interne. Beaucoup plus rarement, on voit des faisceaux se détacher des faisceaux L, M, L, subir une torsion de 180° et s'orienter inversement. C'est le cas pour *R. platanifolius* et pour quelques petits faisceaux chez *R. tuberosus, lanuginosus* et *aconitifolius*, toutes espèces qui ont une gaine longuement ailée et épaisse.

Les auricules ne sont pas vascularisées, sauf chez *R. platanifolius* et *sceleratus*, où quelques ramifications des marginaux vont se terminer en pointe libre près du bord des auricules. D'ailleurs la vascularisation des auricules tout aussi bien que leur plus ou moins grand développement dépend un peu de la vigueur des individus et par conséquent des conditions de milieu.

Dans le pétiole, il y a donc toujours des faisceaux à la face interne pour autant que l'importance et la grosseur de ce pétiole permettent un nombre de faisceaux suffisant.

A la base du limbe existe un nœud produit par la trifurcation du faisceau M et la bifurcation de L. La branche externe de ce dernier, renforcée de la branche latérale du M, se rend dans le segment L du limbe. Les marginaux et tous les faisceaux de la

face interne se séparent en deux groupes dans le plan médian de la feuille. Ils se rendent, quand il n'y a que trois segments au limbe, dans le bord inférieur du segment L : *R. auricomus, sardous*, etc. Plus rarement on voit le faisceau *m* se joindre au faisceau L : *R. repens*. Quand il y a cinq segments ou plus, une branche du *L* renforce le faisceau *m* pour constituer le faisceau principal du segment marginal.

Chez *R. platanifolius*, on voit apparaître vers le sommet du pétiole, dans le sein du *Tfi*, des cordons de cellules étroites et allongées, dont quelques-unes se différencient en trachées à spirieules très serrées. En même temps se produisent les faits généraux concernant la trifurcation et la bifurcation des faisceaux principaux (fig. 378). Tout à la base du limbe, ces trachées deviennent brusquement très nombreuses et prennent des directions transversales. Au même niveau, les faisceaux de la face interne s'infléchissent vers la face externe (fig. 379) en donnant lieu à une voûte anastomotique très complexe. Il y a donc retour des faisceaux internes vers les faisceaux externes, leur lieu d'origine.

Histologie :

a) *Pétiole.* La section transversale du faisceau M des Renoncules du groupe III (fig. 385 à 389) présente un facies typique et caractéristique, à part le *R. hederaceus* qui se rattache aux *R. aquatilis.*

Les éléments du B_2 sont toujours disposés de telle sorte que les plus larges soient sur les côtés du faisceau; la zone cambiale est arquée; le liber est arrondi; il existe un massif de fibres sclérifiées extralibériennes.

Les fibres primitives intra-ligneuses sont assez souvent collenchymateuses; elles sont entourées d'une assise à plissements qui n'est visible qu'autour du bois, mais qui est susceptible de sclérification plus ou moins parfaite, ainsi que les cellules contiguës, de telle sorte que le faisceau est, dans ces cas, entouré d'un étui sclérenchymateux. Diverses combinaisons peuvent donc ainsi se produire avec le sclérenchyme, le collen-

chyme et l'assise à plissements, sans qu'aucune de ces combinaisons soit cependant la caractéristique de l'espèce. Elles paraissent dépendre essentiellement des conditions de végétation. Toutefois, la sclérification est toujours plus intense dans l'arc libérien que dans l'arc ligneux.

Le *Tf.* interne, lacuneux chez *R. sceleratus*, présente toujours une cavité centrale qui disparaît dans le haut du pétiole.

Le tissu intrafasciculaire n'est sclérifié que chez *R. platanifolius*.

L'épiderme est généralement à cuticule lisse, mais elle peut être chagrinée (*R. tuberosus*) ou striée (*R. auricomus*).

b) *Gaine.* Il importe de remarquer qu'en règle générale, et tout au moins dans le bas de la gaine, chaque faisceau est entouré d'un étui sclérenchymateux complet, plus épais que dans le pétiole et qui existe même quand le sclérenchyme du pétiole est presque nul (*R. aconitifolius*).

c) *Limbe.* Mésophylle toujours bifacial. Le parenchyme palissadique, bisérié chez *R. sceleratus* et *hederaceus* (fig. 380), est unisérié dans les autres espèces. Les palissades sont toujours simples, parfois courtes et irrégulières (*R. platanifolius*), généralement courtes, oblongues ou elliptiques, laissant entre elles des méats plus ou moins larges. Le parenchyme spongieux est à grandes cellules ramifiées.

Il n'y a aucun caractère spécifique à tirer du mésophylle. Comparez la figure 381, *R. arvensis* provenant des moissons, avec la figure 382, la même espèce provenant d'un jardin (1).

Épiderme bifacial (*R. sceleratus*, fig. 383 et 384), à cellules irrégulières, même polyédriques à la face interne, très sinueuses à la face externe, sauf chez *R. hederaceus* où il est équifacial, à petites cellules sinueuses. Parfois subéquifacial (*R. sardous* et *bulbosus*). La cuticule est mince et lisse, ou chagrinée (*R. parvi-*

(1) Certaines palissades du *R. arvensis* présentent souvent une saillie qui proémine dans la chambre stomatique; deux saillies en face l'une de l'autre se juxtaposent bout à bout, formant ainsi un pont qui divise cette chambre en deux compartiments.

florus), ou striée à la face externe (*R. tuberosus*), ou enfin chagrinée à la face interne (*R. muricatus*), etc.

Les stomates sont plus ou moins saillants, sauf *R. tuberosus, auricomus, platanifolius, sceleratus*. Les cellules péristomatiques pénètrent sous les cellules de bordure, sauf chez *R. tuberosus*. Ils sont répandus sur les deux faces du limbe, mais généralement moins nombreux à la face interne; ils peuvent néanmoins y devenir aussi nombreux qu'à la face externe (*R. nemorosus, auricomus,* etc.), ou plus nombreux (*R. sceleratus,* fig. 383 et 384), et même devenir presque nuls à la face externe (*R. hederaceus*).

Poils unicellulaires, uniformes, cylindriques, effilés, rarement à membrane mince (poils rubanés de *R. sceleratus*), plus souvent à membrane épaisse. Ils sont presque toujours accompagnés de cellules circumpilaires régulièrement disposées en rosace, qui sont susceptibles de se soulever en piédestal, surtout dans le haut du pétiole et même sur le limbe. C'est chez *R. sardous* (fig. 390, 391, 392) que le soulèvement atteint la plus grande hauteur. Il y a absence de piédestal chez *R. bulbosus, arvensis, muricatus, aconitifolius, sceleratus.*

Je n'ai pas vu de poils chez *R. hederaceus.*

Il existe des spherocristaux chez *R. muricatus* (particulièrement dans le limbe), *R. sardous* (haut du pétiole), *R. aconitifolius* (épiderme externe du limbe), *R. platanifolius* (partout).

La plus ou moins grande quantité de ces cristaux est variable suivant les individus (*R. aconitifolius*).

NOTES CRITIQUES.

Note I. — La gaine.

Certains auteurs, tels que De Candolle (2), Germain de Saint-Pierre (9), Sachs (11), etc., désignent sous ce nom la région inférieure de la feuille « formant un cylindre creux » lorsque cette partie est élargie en une membrane qui embrasse complètement la tige.

Pour Van Tieghem (31), c'est la base dilatée de la feuille par où elle s'attache au pourtour du nœud, en enveloppant plus ou moins la tige à la façon d'un étui.

Nous avons réduit le plus possible la compréhension de ce terme et par suite augmenté son étendue. Quelles que soient sa forme et ses dimensions, la gaine est la région la plus inférieure de l'appendice foliaire. Dans les cas les plus simples, elle pourrait ne comprendre, à l'état adulte de la feuille, que la région d'insertion ou base d'attache.

Note II. — L'ochrea.

Ce terme, qui signifie *guêtre*, a été introduit dans le langage botanique par Wildenow pour désigner plus particulièrement la gaine de la plupart des Polygonées. Van Tieghem (31) considère cette dernière comme formée par des stipules concrescentes, à la fois en dedans du pétiole en passant dans l'aisselle entre lui et la tige, et du côté diamétralement opposé à la feuille, de manière à former une gaine qui enveloppe la base de l'entrenœud supérieur. Colomb (23) déduit de l'examen du parcours des faisceaux que l'ochrea est un organe complexe formé de deux parties : l'une opposée à la feuille qui est la gaine de cette feuille, l'autre placée à l'aisselle de la feuille et détachée du

pétiole, c'est une ligule. Ce serait la même chose chez les Graminées, avec cette différence que, dans les Graminées, la gaine proprement dite est très développée et se prolonge peu au delà du point d'insertion du limbe, tandis que chez les Polygonées, la gaine proprement dite reste très courte et se prolonge beaucoup au-dessus du pétiole où, réunie à la ligule, elle forme l'ochrea.

Si nous rapprochons des renseignements fournis par Trécul (**3**, pl. XXV, fig. 167, 168, 169) sur l'ochrea des Polygonées, les observations que nous avons faites sur la gaine du *Caltha* et celle du *Trollius*, nous pouvons conclure que la gaine vaginée de ces plantes, surtout celle du *Caltha*, est un véritable ochrea se formant d'une manière identique, sur la feuille primordiale, à celui des Polygonées; elle en diffère seulement par sa faible vascularisation, sa courte durée et sa destruction par les feuilles suivantes, destruction occasionnée par la faible hauteur des entrenœuds.

Des observations supplémentaires faites sur la feuille de *Potamogeton lucens* me permettent d'étendre les mêmes remarques à la gaine foliaire (ochrea fendu) de cette plante.

Note III. — La ligule.

Il est bien établi aujourd'hui [Colomb (**26**), Van Tieghem (**31**), etc.] que la ligule des Graminées n'est pas une ramification du limbe dans son plan, mais bien un prolongement de la gaine.

La feuille adulte du *Caltha* et celle du *Trollius* possèdent une ligule formée à la suite du déchirement de leur gaine vaginée, par le développement des feuilles puinées.

Note IV. — Auricules et stipules.

J'ai désigné sous le nom d'*auricules*, les dépendances latérales de la gaine adulte quelle que soit leur forme (*Adonis*, pp. 13

et 14). Ces auricules naissent sur la gaine primordiale à la façon d'un segment primaire de limbe.

Dans le genre *Adonis,* les auricules sont multifides (pl. I, fig. 1). Chez *A. volgensis* et *vernalis* (pp. 19 et 20, pl. I, fig. 11 et 19) où le pétiole est nul, elles deviennent des segments marginaux dans le limbe adulte.

Dans les autres genres, *Anemone, Isopyrum, Ranunculus,* etc., elles affectent généralement une forme plus ou moins arrondie, entière ou dentelée, qui leur a valu le nom d'*oreillettes* ou *auricules :* figures 55, 160, 375.

Partout, elles ont la même valeur organogénique.

Dans le genre *Thalictrum,* De Candolle, Lamarck, Lecoyer considèrent les expansions latérales du pétiole comme des oreillettes dépendant de la gaine, et le genre entier serait ainsi exstipulé. M. Mansion (35) a montré que les expansions pétiolaires du *Thalictrum flavum* dépendent de la gaine, mais il donne le nom de *stipules* à ce que nous avons appelé *auricules* ou mieux *gaine auriculée.*

Je crois, en effet, qu'il y a lieu d'établir une distinction entre les dépendances latérales de la gaine des Renonculacées et les organes spécialisés, bien individualisés, naissant indépendants de la feuille, à côté d'elle et souvent avant elle, et pour lesquels M. Colomb (26) réserve avec raison le nom de *stipules.* La stipule est ainsi définie par cet auteur : « tout appendice inséré sur la tige et dont le système vasculaire est exclusivement formé de dérivations empruntées aux faisceaux foliaires ». Ces dérivations sont très précoces et naissent avant que les faisceaux foliaires soient sortis de la tige.

Il n'en est pas de même des auricules, qui ne sont ordinairement pas vascularisées ou qui, quand elles le sont, sont parcourues par une ou plusieurs ramifications des marginaux extrêmes, ou, en leur absence, des latéraux, ramifications qui prennent naissance dans la gaine elle-même.

Il n'y a pas de stipules dans la famille des Renonculacées où leur existence n'est pas possible à cause de l'insertion foliaire

de 360°. Ce caractère rapproche les Renonculacées des Monocotylées, où l'existence de stipules a souvent été contestée (1).

Note V. — Le limbe.

Beaucoup d'auteurs ont réservé le nom de limbe à la partie généralement plane et foliacée de la feuille.

Nous avons donné à ce terme la plus grande étendue possible, en désignant sous ce nom tout ce qui surmonte le pétiole dans une feuille complète, simple ou composée. C'est ainsi que je nomme limbe dans l'*Anemone nemorosa*, par exemple, l'ensemble des trois segments foliaires et de leurs rachis, dans les *Thalictrum*, l'ensemble de tous les rachis et des folioles souvent au nombre de plusieurs centaines.

Note VI. — Les rachis.

L'étude de l'organogénie et de la morphologie des feuilles d'*Adonis* (pp. 12, 13 et 19) nous a conduit à une nomenclature des rachis quelque peu différente de celle qui est généralement adoptée.

Les rachis sont, dans chaque segment du limbe, ce qu'est le pétiole dans la feuille entière. Un rachis primaire est le support d'un segment primaire et de toutes ses subdivisions; un rachis secondaire est le support d'un segment secondaire et de toutes ses subdivisions, et ainsi de suite.

Note VII. — La feuille simple et la feuille composée.

De nombreux auteurs, à la suite de De Candolle (2), admettent qu'une feuille est composée quand elle est formée de parties articulées les unes sur les autres et séparables, sans déchirement

(1) D'après la description des « stipules » des Rosiers, donnée par M. Parmentier, ces dépendances latérales de la gaine sont donc, dans le genre *Rosa*, de parfaites auricules. (Cfr. P. Parmentier, *Recherches anatomiques et taxinomiques sur les Rosiers*, in Ann. de la Soc. sc. nat., 1897, 8e série, t. VI.)

à la fin de leur vie. Ces pièces foliaires se nomment folioles ou pinnules.

Vesque (17) notamment est de cet avis. Il déclare que toutes les Renonculacées ont des feuilles simples et adopte dans son Mémoire sur les Ranales le terme « peu correct de pétiolule », à défaut d'autre.

Avec Linné (1), Van Tieghem (31) et d'autres auteurs, j'ai admis comme feuille composée, toute feuille dont le limbe présente un ou plusieurs rachis distincts : *Adonis autumnalis*, *Anemone nemorosa*, *Aquilegia vulgaris*, etc.

Dès lors, la *foliole* est une des portions, généralement plane et étalée du limbe composé, avec le rachis ou l'article du rachis qui la supporte. Ce dernier peut être appelé *pétiolule*. Les folioles peuvent être sessiles. Ainsi dans une feuille d'*Aquilegia vulgaris*, page 46, comprenant neuf folioles, les pétiolules sont les six rachis secondaires et les articles supérieurs des trois rachis primaires L, M, L.

Note VIII. — Le faisceau médian supérieur.

Dans la coupe transversale du pétiole, Vesque (17) semble attacher beaucoup d'importance au faisceau médian supérieur, celui qui se trouve à la face interne, et que j'ai souvent désigné par O. Il signale sa présence chez *Hepatica triloba*, *Caltha palustris*, *Anemone pulsatilla*, *Clematis Vitalba*, etc.

A ce sujet, M. Petit (25) déclare « qu'à 2 millimètres de » l'initiale (coupe pratiquée à la base d'insertion) du pétiole de » *Clematis Vitalba*, on voit les deux faisceaux supérieurs (que » nous avons nommés marginaux) donner naissance à deux » autres faisceaux qui se rapprochent l'un de l'autre et sont com- » plètement soudés vers $3^{mm}5$. A partir de là, il n'y a plus de » changement dans la disposition des faisceaux. Parmi les Renon- » culacées, je n'ai trouvé, ajoute cet auteur, une semblable for- » mation d'un faisceau médian supérieur que dans le *Delphinium* » *Staphysagria ;* on la rencontre, au contraire, chez toutes les » Géraniacées et les Malvacées. »

Je puis dans tous les cas affirmer, bien que M. Petit n'ait vu le faisceau médian supérieur, ou interne, que dans deux cas déterminés, que ce faisceau est assez fréquent dans la famille des Renonculacées. On le rencontre çà et là, sporadiquement, dans les genres qui présentent un arc interne de faisceaux pétiolaires.

Il n'a pas la même origine que le faisceau M (voir p. 28). Il apparaît, en effet, dans la gaine ou à la base du pétiole provenant des marginaux ou des divers faisceaux de l'arc externe.

Il est loin d'avoir la même importance que le faisceau M. Nous le voyons, en effet, dans la grande majorité des cas, disparaître au sommet du pétiole et s'y comporter exactement comme un marginal : *Hepatica triloba*, page 45.

Il n'a pas la constance du faisceau M. Ce dernier ne manque jamais. Le médian supérieur peut exister à certain niveau et disparaître à un niveau plus élevé, et même réapparaître ensuite. Ainsi dans un pétiole d'*Anemone nemorosa*, j'ai pu le suivre jusque vers le tiers inférieur, où il s'est divisé pour ne plus se reformer. Dans un autre pétiole de la même espèce, il a apparu au-dessus de la gaine et s'est maintenu jusqu'au sommet du pétiole. Enfin, certains matériaux n'avaient jamais de médian supérieur à aucun niveau. Le médian supérieur n'a donc jamais qu'une importance de second ordre et, à la rigueur, ne mérite aucune appellation spéciale. On peut donc établir que les faisceaux de l'arc interne, quelle que soit leur origine, ne sont que des marginaux et se comportent comme tels. Les *Actaea*, planche V, figure 130, et les *Thalictrum*, planche VI, figure 144, montrent bien un groupe de faisceaux opposés au médian qui accompagnent ce dernier dans le rachis M, mais ce n'est qu'après avoir contribué, avec les marginaux, à la formation de la voûte anastomotique de la base du limbe. Le *Ranunculus platanifolius* possède aussi, dans l'arc interne, un groupe nombreux de faisceaux qui se comportent visiblement d'une façon spéciale. (Voir p. 112.)

Note IX. — Mode de végétation comparé de quelques espèces.

Ceci pourrait sembler un hors-d'œuvre dans un travail traitant de l'anatomie des feuilles. J'ai été amené à m'occuper de cette question en recherchant des matériaux pour l'étude, à tous les âges, de toutes les feuilles d'une espèce déterminée. Il y a là une mine précieuse de renseignements des plus intéressants, au point de vue de l'histoire des plantes. Je crois même qu'il ne serait pas sans profit de créer une sorte d'Éthologie végétale à l'instar de ce qui existe en zoologie.

Voici quelques observations générales complémentaires qui pourraient être utilisées dans ce but.

Plantes cespiteuses. — Les souches sont formées par les parties persistantes des tiges des années antérieures. La persistance pouvant être de plusieurs années, il peut exister des sortes de rhizomes courts et obliques, greffés l'un sur l'autre en sympode : *Actaea* (pl. V, fig. 123). Si la persistance est de peu de durée, le rhizome est alors court et il développe un grand nombre de racines adventives qui lui permettent de s'affranchir de bonne heure de la tige mère : *Caltha* (pl. VIII, fig. 214).

La pousse florifère traverse une période de repos qui est généralement l'hiver, sous la protection d'un abri formé par :

1° des feuilles pérulaires, qui sont les premières feuilles de la pousse. Le bourgeon est souterrain. Il n'y a qu'une foliaison printanière qui précède la floraison : *Actaea spicata, Paeonia officinalis, Cimicifuga fœtida, Aconitum Napellus;*

2° les gaines des feuilles végétatives de la région moyenne de la pousse. Le bourgeon est souterrain. Il y a deux foliaisons sur la même pousse : l'une, printanière, qui précède la floraison; l'autre, estivale, qui se fait pendant et après la floraison : *Aquilegia vulgaris, Ranunculus acris* (p. 107);

3° les gaines des feuilles végétatives supérieures. Le bour- est souterrain. Il n'y a sur la même pousse qu'une seule foliaison qui s'est produite l'année antérieure à la floraison : *Caltha palustris* (p. 72);

4° des feuilles différenciées spécialement en vue de l'hivernage et apparaissant au-dessus des feuilles végétatives supérieures. Le bourgeon est en partie souterrain, partie aérien. Une seule foliaison comme au *Caltha : Trollius europaeus* (p. 60) ;

5° des bractées. Le bourgeon est entièrement aérien : *Helleborus fœtidus* (p. 79).

Plantes rhizomateuses. — Moins nombreuses dans les Renonculacées. L'*Helleborus colchicus* a un rhizome sympodique quand il devient florifère : le mode de végétation rappelle beaucoup celui de l'*Anemone nemorosa* (1). Voir page 26.

Remarque. — Dans l'*Helleborus fœtidus* et le *Trollius europaeus* il a été signalé l'existence de deux pérules, l'une foliaire, inférieure, l'autre florale, supérieure.

Chez *Trollius*, la pérule florale est constituée par des feuilles différenciées. Chez *Helleborus*, ce sont les bractées inférieures qui protègent les fleurs pendant l'été et l'automne.

En réalité, toutes les pousses florifères ont une pérule florale formée par l'ensemble des bractées, et si le fait est plus tangible chez l'Hellébore, cela tient à ce que chez cette plante il existe un état de repos relatif ou de ralentissement dans la végétation qui précède l'épanouissement des fleurs.

(1) Rappelons ici que les *Ranunculus aquatilis, divaricatus, fluitans, hederaceus,* etc., sont toujours sympodiques dans leur région florifère.

SECONDE PARTIE.

PLAN DE LA SECONDE PARTIE.

I. — Synthèse des observations faites dans la famille des Renonculacées.

A. Étude de la feuille dans le temps;

B. Étude de la feuille dans l'espace :

1° Étude à tous les niveaux de ce membre :

a) Parcours des faisceaux;

b) Histologie.

2° Étude comparative des feuilles insérées à diverses hauteurs le long d'une même tige.

3° Influence du milieu.

II. — Anatomie systématique des Renonculacées dans l'état actuel de nos connaissances.

Liste alphabétique des espèces citées.

Renseignements historiques et bibliographiques.

I. — SYNTHÈSE DES OBSERVATIONS FAITES DANS LA FAMILLE DES RENONCULACÉES.

Contribution à la théorie de la feuille.

Au point de vue morphologique, on doit donner le nom de feuille à tout membre appendiculaire de la tige caractérisé par une croissance limitée et par l'existence d'un seul plan de symétrie. Toute feuille possède une base d'insertion plus ou moins large, un sommet organique plus ou moins atténué, une face interne (ou ventrale tournée primitivement vers la tige et ordinairement supérieure après étalement), une face externe (dorsale ou inferieure), enfin deux moitiés, une à droite, l'autre à gauche.

Une feuille complète se compose de trois régions presque toujours superposées : la gaine, le pétiole, le limbe.

Gaine. La gaine est la région basilaire de la feuille. Elle rattache les autres régions à la tige. Sa forme extérieure, tout aussi bien que sa structure interne, est susceptible de variations suivant le niveau.

Il y a lieu de distinguer la gaine dans le bourgeon et la gaine dans la feuille adulte.

La gaine se différencie de bonne heure dans la feuille primordiale et se développe rapidement. Elle peut atteindre son état adulte dans le bourgeon et y manifester sa pleine vitalité dans toutes ses parties. Dans ce cas, elle revêt sa forme parfaite avant l'épanouissement du limbe et exerce un rôle de protection envers les feuilles plus jeunes situées en dedans.

Quand la feuille est adulte, la forme de la gaine est susceptible de modifications, car sa région antérieure seule partage la destinée du pétiole. La vie se retire des régions latérales et postérieures devenues inutiles. Aussi la forme de la gaine de la

feuille adulte peut-elle être très différente de la forme de la gaine dans le bourgeon (*Caltha*).

Un temps plus ou moins long peut s'écouler entre l'état adulte de la gaine et celui du limbe qu'elle supporte. Ainsi certaines feuilles de *Caltha* ont leur gaine adulte en été et leur limbe n'atteint cet état qu'au printemps suivant.

La gaine adulte de la feuille végétative peut être :

a) *Simple* ou *non ailée ;* c'est tout bonnement un élargissement court et subtriangulaire de la base de la feuille : *Garidella Nigellastrum*, planche II, figure 21. Il n'y a pas, dans ce cas, de régions latérales où la vitalité soit moins active. Toutes les régions de la gaine ont les mêmes fonctions que le pétiole ;

b) *Ailée ;* elle est plus ou moins allongée, élargie, aplatie sur ses bords où elle est submembraneuse : *Ranunculus arvensis*, planche XIII, figure 350. La vitalité est généralement nulle dans les régions latérales qui deviennent « scarieuses » dans la feuille adulte. La région antérieure seule partage les fonctions du pétiole ;

c) *Auriculée ;* elle est courte, et les régions latérales, naissant sur la gaine primordiale comme un segment primaire de limbe, ont une forme variable. Tantôt étalées, arrondies, membraneuses (*Anemone nemorosa*, planche III, figure 55); tantôt multifides (*Adonis autumnalis*, planche I, figure 1). Quand elles sont vascularisées, elles conservent plus longtemps leur vitalité dans la feuille adulte ;

d) *Auriculo-ailée ;* elle est plus ou moins allongée avec deux auricules variablement développées dans le haut des régions latérales : *Ranunculus repens*, planche XIII, figures 348 et 349 ;

e) *Vaginée*, en forme de doigt de gant de longueur variable avec une ouverture apicale. Il y a toujours deux régions, l'une dans le prolongement du pétiole, l'autre parallèle au pétiole sur une certaine hauteur, *Caltha palustris*, planche VIII, figure 217, *Trollius europaeus*, planche VII, figures 169 et 170. Dans la famille des Renonculacées, la gaine vaginée n'est pas reconnaissable dans la feuille adulte.

Pétiole. Nous n'avons pas encore une bonne définition du pétiole, disait Vesque au Congrès de Paris en 1889.

Dans la pratique, on désigne sous ce nom une portion plus ou moins rétrécie dans laquelle se produit un accroissement intercalaire assez tardif.

On peut établir qu'en règle générale, la forme extérieure du pétiole est constante à tous les niveaux; il en est de même de sa structure interne, si l'on ne tient pas compte de la région de transition inférieure qui le rattache à la gaine et de la région de transition supérieure qui prépare le limbe.

Cette forme extérieure est ordinairement celle d'un demi-cylindre plus ou moins creusé en gouttière, à la face interne. Ce peut être aussi un cylindre presque régulier : dans ce cas les segments du limbe ont une tendance marquée à se disposer en rayonnant autour de l'axe du pétiole : *Aquilegia vulgaris*, *Delphinium nudicaule*, *Eranthis hyemalis*, *Trollius europaeus*. D'autres fois les segments du timbe conservent cependant leur position étalée ordinaire : *Paeonia Moutan*, *Helleborus niger*.

Limbe. Généralement aplati en lame, il offre de nombreuses variations dans sa forme et particulièrement dans les découpures du contour extérieur.

Tout limbe qui présente un ou plusieurs rachis est dit *composé* (avec folioles et pétiolules); dans les cas contraires, il est *simple* (1).

On distingue le limbe :

a) *Monacrone*, simple ou composé.

Le limbe monacrone est caractérisé par un seul sommet primaire apparu sur la gaine de la feuille primordiale et par la convergence des faisceaux principaux vers ce sommet.

Le limbe monacrone, qui ne se compose que d'un seul segment, est simple : *Ranunculus Lingua*, planche XI, figure 314. S'il porte des segments secondaires rachidés, il est composé : *Garidella Nigellastrum*, planche II, figure 21.

(1) Voir la note VII, pp. 118 et 119.

b) *Triacrone*, simple ou composé.

Le limbe triacrone est caractérisé par trois segments apparus en ordre basipète sur la gaine de la feuille primordiale et par la divergence des faisceaux principaux L, M, L. Il est simple : *Hepatica triloba*, ou composé : *Anemone nemorosa*, planche III, figure 56.

Dans ce dernier cas, chacun des trois segments primaires L, M, L peut présenter des segments secondaires formés en ordre acropète dans les segments primaires : *Aquilegia vulgaris*, planche V, figure 113. De même, les segments secondaires peuvent à leur tour être constitués par des segments tertiaires, etc. *Actaea spicata*, page 50.

c) *Polacrone*, simple ou composé.

Le limbe polacrone est caractérisé par plusieurs segments (5, 7, ...) apparus en ordre basipète sur la gaine de la feuille primordiale et par la divergence des faisceaux principaux :

m L M L *m*

ou bien

m' *m* L M L *m'*.

Il est ordinairement simple : *Trollius europaeus*, planche VII, figure 172.

Il est composé chez *Adonis vernalis* et *volgensis*, planche I, figures 11 et 19.

Du limbe triacrone simple, à segments concrescents à la base, on passe facilement au limbe polacrone à cinq segments :

m L M L *m*.

On remarquera que, dans les Renonculacées, les segments foliaires primaires se développent toujours en direction basipète.

Je suis porté à admettre, avec M. le professeur A. Gravis (1), que ce fait est le résultat de causes mécaniques.

(1) *Recherches anatomiques et physiologiques sur le* Tradescantia virginica, pp. 164 à 166.

A. ÉTUDE DE LA FEUILLE DANS LE TEMPS.

Organogénie.

Dans la famille des Renonculacées, la feuille végétative la plus complète débute toujours par une feuille primordiale possédant une insertion de 360° (1). Cette feuille primordiale a la forme d'un manchon très court entourant le sommet végétatif de la tige. Il est généralement fendu suivant la génératrice postérieure, dans le plan médian de la feuille, mais il peut être aussi parfaitement complet : *Caltha*, *Trollius*, *Thalictrum*, etc.

Dans cette feuille primordiale se différencient un ou plusieurs points végétatifs primaires, insérés sur la gaine et qui se développent, indépendants les uns des autres, en autant de mamelons primaires représentant le premier stade du jeune limbe. On aura donc :

limbe monacrone							M						
limbe triacrone						L	M	L					
limbe polacrone				*m*	L	M	L	*m*					
			m'	*m*	L	M	L	*m*	*m'*				
		m	L	*i*	M	*i*	L	*m*,	etc.				

Tous ces points végétatifs peuvent être confondus en une zone végétative plus ou moins étendue : *Caltha*.

Les mamelons deviennent en se développant des segments primaires.

Tandis que les points végétatifs primaires apparaissent en ordre basipète sur la gaine de la feuille primordiale, les points végétatifs secondaires naissent ordinairement en ordre acropète sur les mamelons primaires.

Il peut se former des points végétatifs de troisième ordre, de quatrième ordre, etc.

(1) Il peut ne pas en être de même chez certaines espèces annuelles hétérophylles, quand la feuille la plus complète ne se trouve pas dans la région la plus inférieure de la tige.

Souvent d'autres points végétatifs prennent naissance dans les régions latérales de la gaine primordiale (*Anemone nemorosa*, p. 27, fig. 51 et 52); ils ne contribuent pas — sauf chez certains *Adonis*, pages 19 et suivantes — à l'édification du limbe, mais restent des dépendances latérales de la gaine sous le nom d'*auricules*. Il est à remarquer que les sommets végétatifs qui donnent naissance aux auricules sont ceux qui naissent les derniers, mais ce sont ceux qui atteignent leur état adulte les premiers, parce qu'ils fonctionnent les premiers (*Anemone nemorosa*, p. 27, pl. III, fig. 50 à 54). Cette remarque est peut-être une dérogation à une conclusion formulée par M. Massart (**34**, p. 236).

La croissance intercalaire qui doit soulever le limbe et former le pétiole se manifeste avant celle qui doit donner lieu aux divers rachis dans le cas d'un limbe composé.

Les rachis de même ordre apparaissent simultanément ou successivement.

Les rachis secondaires apparaissent après les rachis primaires.

Les divers articles d'un même rachis apparaissent et se développent en ordre acropète comme les segments que porte ce rachis.

B. ÉTUDE DE LA FEUILLE DANS L'ESPACE.

1° Étude à tous les niveaux de ce membre.

a) Parcours des faisceaux.

Nombre. Le nombre des faisceaux reçus par la feuille est éminemment variable dans les Renonculacées (3 à 40), variable d'un genre à l'autre, variable dans les espèces de certains genres, mais paraissant assez constant chez d'autres. Il peut même varier suivant les individus et aussi sur un même pied pour des feuilles absolument identiques et comparables : pousse homophylle d'*Aquilegia vulgaris*.

Ce nombre n'est pas toujours corrélatif aux dimensions de la feuille : *Clematis heracleaefolia* qui, malgré ses grandes dimensions, reçoit de la tige seulement trois faisceaux.

Direction. Ce qui caractérise la marche générale des faisceaux dans la gaine, c'est leur convergence vers le plan de symétrie de la feuille pendant que le faisceau médian, le plus important par sa grosseur et sa longueur, reste toujours dans ce plan.

Dans le pétiole, tous les faisceaux principaux restent toujours parallèles entre eux et au plan de symétrie. Les anastomoses obliques échangées entre ces faisceaux ne modifient généralement pas le facies de la coupe typique du pétiole. Ce ne sont d'ailleurs que de petits faisceaux qui relient entre eux les faisceaux principaux; ils forment un reticulum comparable à celui qui existe entre les nervures d'un limbe.

Dans le limbe, il y a convergence des faisceaux principaux vers le sommet de la feuille si le limbe est monacrone et divergence quand le limbe est tri- ou polacrone.

Disposition. Dans la gaine et dans le pétiole, les faisceaux peuvent se disposer suivant deux modes fondamentaux.

Premièrement, sur un seul arc à convexité externe, orientés normalement, bois en dedans, liber en dehors. Cette disposition ne se rencontre que dans les feuilles à limbe monacrone, ainsi que chez les Hellébores et les Pivoines. Il peut en être de même, par suite du nanisme, chez certaines espèces à limbe triacrone ou polacrone, *Isopyrum*.

Secondement, sur deux arcs, l'un externe, l'autre interne, ce dernier inversement orienté. L'arc interne peut être formé soit par des faisceaux marginaux qui se sont rapprochés du plan médian (*Anemone nemorosa*, p. 28), soit par des faisceaux spéciaux qui se sont détachés des faisceaux de l'arc externe (*Caltha palustris*, p. 74); soit enfin et plus souvent par ces deux procédés à la fois.

Plus rarement il y a des faisceaux disséminés dans le *Tf.* du pétiole, les principaux vers le centre : *Anemone Japonica*,

planche IV, figure 92; *Caltha palustris*, planche VIII, figure 223, ou sur les arcs de la périphérie : *Anemone nemorosa*, planche III, figure 59.

Enfin, on peut rencontrer un cercle presque régulier de faisceaux dans le pétiole de l'*Aquilegia vulgaris*, du *Delphinium nudicaule*, du *Trollius europaeus*, de l'*Eranthis hyemalis*, etc., du *Paeonia Moutan*, de l'*Helleborus niger*.

Chez ces deux dernières espèces, ce sont les deux branches d'un arc en fer à cheval dont les extrémités quelquefois écartées sont plus souvent rapprochées.

Nomenclature. Après le faisceau médian M, les faisceaux les plus importants par leur grosseur et leur longueur sont les faisceaux latéraux, faisceaux L.

Entre le médian et le latéral, dans l'arc externe, sont les intermédiaires de divers ordres : i, i', i'', i'''...

En dehors des latéraux, dans l'un des deux arcs ou dans tous les deux, sont les marginaux de divers ordres: m, m', m'', m'''... Quand les faisceaux sont nombreux, il n'est pas toujours aisé de reconnaître le latéral, dans le pétiole et dans la gaine. Dans ces cas, la comparaison avec les espèces voisines est d'un grand secours. On peut aussi rechercher les faisceaux L dans le limbe et les suivre dans leur marche descendante.

Le faisceau médian est le seul qui ne se divise jamais, dans son trajet jusqu'à la base du limbe. Il peut bien envoyer des ramifications de chaque côté du plan médian, mais ces ramifications sont de peu d'importance, et elles ne modifient pas sensiblement la grosseur du faisceau M.

Les faisceaux latéraux ne se divisent que quand les intermédiaires et les marginaux qui les avoisinent sont assez nombreux et d'égale importance (*Thalictrum*).

Nervation. Le parcours dans le limbe constitue la nervation. Assez souvent, on retrouve à la base du limbe les faisceaux que l'on a observés à la base de la gaine. En outre, des modifica-

tions importantes, préparatoires à la dispersion des faisceaux dans le limbe, se produisent généralement à ce niveau.

Quand le limbe est monacrone, les faisceaux passent simplement et sans division aucune si le limbe est simple, et avec division ou ramification des latéraux ou des marginaux pour fournir des faisceaux aux segments secondaires s'il est composé. Dans ces cas, il y a convergence des faisceaux principaux vers le sommet du limbe.

Quand le limbe est triacrone ou polacrone, il y a toujours divergence des faisceaux principaux précédée de la trifurcation du faisceau M et souvent de la bifurcation des L. Le M se rend comme faisceau principal dans le segment médian. Il en est de même des L et, s'il y a lieu, des faisceaux *m*, *m'*... dans leurs segments respectifs. Dans les cas les moins compliqués, les faisceaux de l'arc interne se partagent en deux groupes suivant le plan médian pour se rendre dans les segments qui leur sont assignés de chaque côté de ce plan. C'est ce qui arrive généralement quand le limbe est simple. S'il est composé, il y formation au sommet du pétiole, d'une voûte anastomotique d'autant plus complexe que le limbe est plus composé, *Thalictrum*, *Actaea*, *Cimicifuga*. Cette voûte est spécialement constituée par des arcs transversaux échangés entre les marginaux de l'arc interne et les intermédiaires de l'arc externe. Enfin, si le limbe est entier, sans segments distincts, le faisceau L peut se ramifier à l'infini en éventail (*Caltha*, pl. VIII, fig. 225). Mais dès que les segments du limbe, bien que concrescents à la base, deviennent distincts, les faisceaux L et, s'il y a lieu, les faisceaux *m* se continuent visiblement jusqu'au bord du limbe : *Oxygraphis*, *Ranunculus hederaceus*.

Le parcours dans les rachis est caractérisé, comme dans le pétiole, par le parallélisme des faisceaux principaux. Deux articles, ou entrenœuds consécutifs d'un même rachis, ne diffèrent entre eux que par le nombre des faisceaux. La réduction du nombre a lieu à chaque nœud seulement.

b) Histologie.

Système des faisceaux. Afin de rendre plus rigoureuse la comparaison des faisceaux au point de vue histologique, j'ai toujours considéré le faisceau M au milieu du pétiole. La forme du massif ligneux, sur la coupe transversale, a été signalée depuis quelque temps déjà. C'est une sorte d'arc, de croissant ou de V qui embrasse le liber entre ses branches. Une exception doit être faite pour les Pivoines et les Hellébores qui ont une zone cambiale en ligne droite ou même en ligne courbe avec convexité externe. Dans certains cas, la forme du bois et celle de la zone cambiale sont susceptibles de variation suivant le niveau : *Trollius europaeus,* planche VII, figure 174, 176 et 180, *Aconitum Napellus,* planche VIII, figure 201, etc.

Le liber forme un massif arrondi ou elliptique. Rappelons les particularités cytologiques signalées chez *Trollius europaeus,* page 62, et *Aconitum sp.*, page 67.

Le sclérenchyme (1) est généralement représenté par un arc extralibérien de fibres sclérifiées, plus rarement il existe en même temps un arc intraligneux.

Fréquemment, dans la gaine, il y a un étui sclérenchymateux complet autour de chaque faisceau; cet étui persiste chez certaines espèces dans le pétiole; il peut même exister dans la gaine alors qu'il n'y a pas de sclérenchyme dans le pétiole. Ordinairement, l'arc extralibérien est contigu au liber, mais dans certains

(1) La sclérification se produisant à un âge déjà avancé de la feuille, à un moment où il n'est plus possible de distinguer les fibres primitives ou cellules procambiales du tissu fondamental environnant, il est dès lors difficile de distinguer nettement, dans la feuille adulte, les éléments du faisceau primitif de ceux du *Tf.* J'ai pu d'ailleurs constater que la sclérification peut indifféremment envahir les cellules du faisceau et celles du *Tf.*, ainsi que l'assise à plissements, quand elle existe, et les assises qui lui sont contiguës en dedans et en dehors (nombreuses Renoncules). Si donc, dans la feuille adulte, je rattache les éléments sclérifiés et l'assise à plissements au système des faisceaux, il est bien entendu que, dans l'ensemble ainsi compris, il peut exister des éléments différenciés provenant du *Tf.* primitif.

cas il peut en être séparé par un groupe de cellules : *Garidella nigellastrum*, planche II, figure 23.

Dans les feuilles composées, le sclérenchyme du faisceau disparaît aux nœuds des rachis pour réapparaître dans l'entre-nœud supérieur. Très rarement il persiste dans les nœuds : *Anemone Pulsatilla.*

L'assise à plissements peut exister dans des cas peu nombreux autour des faisceaux. Elle n'est d'ailleurs pas toujours bien évidente à tous les niveaux. Ce n'est donc qu'un caractère d'ordre tout à fait secondaire.

Système du tissu fondamental. Au milieu du pétiole, le *Tf.* interne est un parenchyme méatique, parfois lacuneux, à parois minces, plus rarement à parois épaissies et ponctuées : *Paeonia officinalis*, etc.

Il est généralement traversé par une cavité centrale schizolysigène. A part quelques exceptions, cette cavité ne se forme pas au sommet du pétiole. On l'observe souvent dès la base de la gaine, mais lorsque le pétiole contient un arc interne de faisceaux détachés de l'arc externe (certains *Thalictrum*), la cavité centrale du pétiole n'existe qu'au-dessus du niveau où l'arc interne a pris naissance.

Le *Tf.* interfasciculaire ne présente aucun caractère spécial, sauf quand il se sclérifie. Dans ce cas, il y a des ponts sclérenchymateux reliant les arcs extralibériens pour former un étui complet vers la périphérie du pétiole : *Thalictrum sp.*, *Clematis sp.*, *Aconitum sp.*, etc.

Les éléments sclérifiés des ponts interfasciculaires sont des cellules non pointues à leurs extrémités et différant par là des fibres allongées et pointues extralibériennes.

Le *Tf.* externe peut être partiellement collenchymateux. C'est le cas de l'hypoderme du pétiole, tout au moins vers la face externe. Quand il y a des arêtes au pétiole, on y observe souvent de petits cordons de cellules de collenchyme : Garidelle. D'autres fois, il y a quelques assises de cellules collenchymateuses sous-épidermiques sur toute la périphérie du pétiole : *Paeonia officinalis*, *Paeonia Moutan*, etc.

Dans le limbe, — dans les folioles, s'il s'agit d'un limbe composé — le *Tf.* porte le nom de mésophylle. Rarement homogène (*Ranunculus aquatilis*, *Myosurus minimus*), il est dans la plupart des cas hétérogène et bifacial. Le *Tf.* interne est presque toujours palissadique unisérié, quelquefois bisérié : *Aquilegia*, figure 119. Il est constitué par des cellules qui peuvent être courtes, isodiamétriques ou irrégulières, ne formant pas de véritables palissades : *Actaea spicata*, figure 132, *Hepatica triloba*, figure 108, *Paeonia*, figure 289, etc., ou par des cellules allongées elliptiques, oblongues, simples ou rameuses (*Armpalissadenzellen*), tantôt très serrées mais séparées quand même par d'étroits méats : *Adonis vernalis*, *Helleborus colchicus*, *Thalictrum sp.*, tantôt plus lâches : *Ranunculus Lingua*, figure 317.

Le *Tf.* externe est un parenchyme spongieux caractérisé par des cellules ramifiées, même étoilées, adjacentes les unes aux autres par les extrémités de leurs bras. Elles laissent entre elles des lacunes et leurs plus grandes dimensions sont parallèles à la surface de la feuille. Plus rarement ces cellules sont petites, irrégulières, très serrées et forment un tissu assez compact : les *Thalictrum*, planche VI, figures 149 et 150.

Système de l'épiderme. Sur le pétiole, comme aussi sur la gaine, les rachis et les nervures principales du limbe, l'épiderme se compose de cellules tabulaires, de forme quadrangulaire, pentagonale ou hexagonale sur la face externe et presque toujours fortement étirées longitudinalement. Elles ne sont pas étirées dans les régions de moindre croissance, telles que le sommet du pétiole.

La cloison intérieure de ces cellules est souvent collenchymateuse. Les cloisons latérales, ordinairement minces, sont cependant parfois épaissies et ponctuées : *Helleborus sp.*, *Paeonia sp.* La cloison extérieure, toujours cutinisée, plus ou moins épaisse, est assez souvent marquée de stries longitudinales : *Adonis*, *Helleborus*, *Trollius*, etc., plus rarement de granulations : *Nigella sp.*, *Paeonia officinalis*, etc.

L'épiderme du pétiole porte toujours des stomates sauf, dans

les espèces submergées, et très souvent des poils ou tout au moins des traces de poils quand ceux-ci sont caducs.

Dans l'intervalle entre les nervures, les cellules épidermiques vues de face montrent des cloisons minces et sinueuses. Ces sinuosités sont parfois très peu marquées ou nulles (lanières des *Batrachium*, les folioles de certains *Thalictrum*, à la face interne du limbe des *Aquilegia*, *Isopyrum*, *Helleborus niger*, *Paeonia Moutan*, etc.).

Plus souvent bifacial, par le fait que les sinuosités sont plus accentuées à la face externe, l'épiderme peut être aussi équifacial : *Caltha*, *Ficaria*, *Garidella*, *Myosurus*, *Ranunculus lingua*, etc.

Les cloisons latérales des cellules épidermiques sont quelquefois épaisses et ponctuées : *Clematis heracleaefolia*, face interne, beaucoup d'Hellébores.

Quant à la cloison extérieure, elle est rarement bombée, comme Vesque l'a signalé chez *Aquilegia vulgaris*, comme aussi chez *Helleborus niger*, planche X, figure 274, et çà et là sur le pétiole des Nigelles, planche II, figure 28. Chez les Nigelles, l'*Adonis volgensis*, le même fait se manifeste sur les cellules marginales des folioles.

La cutinisation est souvent plus faible à la face externe du limbe. En général, elle est faible, toujours plus faible que sur le pétiole, les rachis et les nervures, mais elle peut être suffisante pour permettre une striation de la cuticule : *Actaea spicata*, page 52, *Trollius europaeus*, page 64. Dans les Hellébores, la cuticule est très épaisse et fortement striée. Au lieu de stries, la cuticule peut être marquée de fines granulations : Garidelle, Nigelles, Pivoines, etc., qui sont de nature cireuse chez *Aquilegia* et *Ranunculus Lingua*.

Les stomates réalisent toujours la forme que Vesque a désignée sous le nom de « forme renonculacée ». Sa caractéristique est l'absence de cellules annexes, et le cloisonnement en U dans une cellule mère.

Quand l'épiderme est équifacial, le nombre des stomates est à peu près aussi considérable à la face interne qu'à la face externe.

S'il est bifacial, il peut exister des stomates à la face interne, mais toujours en nombre moindre : beaucoup de Renoncules, *Hepatica triloba, Isopyrum fumarioides, Anemone japonica,* etc. Mais, en règle générale, les stomates n'existent qu'à la face externe.

Sur le pétiole ils ne manquent jamais, sauf chez les espèces submergées. Voir pages 105 et 106.

Les poils, dans la famille des Renonculacées, sont unicellulaires, rarement (*Thalictrum sp.*) pluricellulaires par prolifération, mais alors unisériés.

Les cellules épidermiques circumpilaires peuvent affecter une disposition en rosace, plus ou moins régulière, autour de la base du poil. Elles peuvent même se soulever au-dessus de la surface de l'épiderme, soulever avec elles le poil et lui constituer ainsi une sorte de socle ou piédestal plus ou moins élevé. Assez souvent ce soulèvement se produit au sommet du pétiole sans exister ailleurs : *Anemone sp.*, voir page 41.

Certains poils atteignent leur état adulte dans le bourgeon; sur la feuille adulte, ils ont disparu ou sont flétris.

Dans des cas très peu nombreux, je n'ai pas vu de poils à aucun stade du développement de la feuille : *Myosurus minimus, Ranunculus hederaceus, Ficaria ranunculoides, Oxygraphis cymbalariae,* et quelques autres. Je ne puis affirmer pour cela que ces espèces en soient complètement dépourvues, car j'ai pu constater dans d'autres espèces (certains *Thalictrum*, notamment) l'extrême rareté des poils sur divers matériaux alors que d'autres en étaient abondamment chargés. Le pilosisme est, comme on sait, soumis à l'influence du milieu.

Néanmoins les poils fournissent des caractères précieux dans la diagnose tantôt des espèces, tantôt des genres. Les principales formes que l'on peut rencontrer sont :

1° Poil cylindrique, aigu, à membrane épaisse, persistante : *Anemone nemorosa,* planche III, figure 66.

Il devient conique quand il est court (bords du limbe) : *Anemone nemorosa*, planche III, figure 69;

2° Poil cylindrique, rubané, à sommet arrondi, membrane

mince, ordinairement caduc : *Trollius europaeus*, planche VII, figure 184;

3° Poil cylindrique, épaissi unilatéralement (certaines Clématites), forme intermédiaire entre les deux précédents : *Clematis Flammula*, planche XI, figure 306 ;

4° Poil court, claviforme, vésiculeux, pyriforme, à membrane mince ou épaisse, caduc ou persistant : *Adonis autumnalis*, planche I, figure 6, *Helleborus fœtidus*, planche IX, figure 251;

5° Poil ventru, capité, court; *Thalictrum minus*, planche VI, figure 153, *Thalictrum fœtidum*, figure 156.

Plusieurs formes peuvent se rencontrer dans la même espèce. Il existe :

Une forme dans les genres *Ceratocephalus*, *Actaea*, *Cimicifuga*, *Isopyrum Aconitum*, *Caltha*, *Paeonia*, *Ranunculus*, ainsi que certains *Thalictrum* ou *Helleborus;*

Deux formes dans les genres *Adonis*, *Anemone*, *Hepatica*, *Aquilegia*, *Trollius*, *Clematis*, ainsi que certains *Thalictrum* et *Helleborus;*

Trois formes bien distinctes chez certaines *Anemones*, planche III, figures 66 et 69, *Delphinium Staphysagria*, planche VIII, figure 213.

Les cristaux sont rares chez les Renonculacées. J'ai pu cependant en observer dans les genres *Anemone*, page 41, *Thalictrum*, page 58, *Paeonia*, page 92, *Ranunculus*, page 114.

2° Étude comparative des feuilles insérées à diverses hauteurs le long d'une même tige.

Dans les espèces annuelles, au-dessus des cotylédons, existe une série progressive de feuilles végétatives, suivie d'une série régressive qui se continue par les feuilles bractéales.

Dans les espèces vivaces herbacées, il y a lieu de distinguer sur la pousse :

1° *Les feuilles périulaires* (Niederblätter). Elles forment généralement une série progressive. Ce sont des feuilles végétatives frappées d'arrêt dans leur développement, dès les premiers

stades. Comme c'est la gaine chez ces dernières qui se développe d'abord, c'est aussi la gaine des feuilles périulaires qui prend le plus de développement et qui même souvent existe seule, les autres régions restant à l'état rudimentaire.

Les feuilles périulaires atteignent leur état adulte dans le bourgeon. Quand celui-ci s'épanouit, leur rôle est terminé; elles disparaissent alors ou subsistent desséchées. On les connaît dans cet état sous le nom d'écailles.

Une feuille périulaire est en général caractérisée par une large insertion, faible hauteur, contour subtriangulaire, structure homogène, consistance plutôt charnue que membraneuse, couleur blanchâtre, rarement verte, brunissant de bonne heure (1).

La préfeuille des bourgeons hivernants est remarquable par son insertion, qui me paraît se présenter d'une manière constante chez toutes les espèces que j'ai examinées. Le faisceau médian de la préfeuille est dans un plan perpendiculaire au plan formé par l'axe du bourgeon et celui de la tige. La périule est quelquefois réduite à la préfeuille (*Caltha*);

2° *Les feuilles végétatives* (Laubblätter). Dans une pousse dite homophylle, elles sont toutes sensiblement de même importance : *Caltha;* les entrenœuds sont très courts.

Dans une pousse hétérophylle on peut avoir un certain nombre de feuilles végétatives toutes semblables, vers le milieu de la pousse : *Aconitum Napellus*, ou bien une seule feuille végétative plus complète, plus développée que toutes les autres : *Paeonia officinalis;*

3° *Les feuilles bractéales* (Hochblätter). Ce sont toutes les feuilles qui portent à leur aisselle un pédicelle floral, ou un rameau florifère, ou bien l'axe d'une inflorescence. Dans ce dernier cas (*Actaea*), il peut exister des bractéoles.

Elles forment une série régressive. Le métamorphisme porte spécialement sur le nombre des faisceaux qui diminue, sur le

(1) Cf. A. Braun, *Betrachtungen über die Erscheinung der Verjüngung in der Natur*, 1851.

pétiole qui se raccourcit et qui finit par disparaître, sur la gaine qui amplifie ses régions latérales et qui forme des auricules distinctes (*Thalictrum*), au point qu'elles se confondent parfois avec les segments du limbe (*Adonis sp.*, *Delphinium Ajacis*). Parfois la gaine et le pétiole disparaissent totalement et la bractée est réduite au limbe (involucre bractéal des Anémones) ou seulement à la portion supérieure du limbe (*Ranunculus Lingua*).

Les feuilles bractéales supérieures, comme d'ailleurs les premières feuilles pérulaires, toutes à vascularisation faible, ont une vie courte et peu active; de bonne heure elles sont réduites à l'état d'écailles.

3° Influence du milieu.

On a recherché, dans ces dernières années, l'influence produite isolément par les divers agents physiques ou chimiques, dont l'ensemble constitue le milieu, sur la structure des végétaux et plus particulièrement sur la morphologie interne des appendices foliaires. La voie est à peine tracée et les résultats acquis dès à présent sont loin d'être définitifs. Faire la part de chaque agent n'est d'ailleurs pas la moindre difficulté.

1. *Influence du bord de la mer.* — Duval-Jouve a reconnu que la plante du littoral possède un parenchyme incolore très développé.

En comparant quatre-vingt-dix espèces vivant sur le bord de la mer et dans l'intérieur des terres, Lesage (**28**) a constaté que :

a) La feuille est généralement plus épaisse au bord de la mer qu'à l'intérieur des terres;

b) L'augmentation d'épaisseur est accompagnée d'un grand développement du tissu palissadique, soit par allongement des palissades, soit par augmentation du nombre des assises;

c) Les méats et les lacunes se réduisent au bord de la mer;

d) La chlorophylle tend à diminuer dans les cellules des plantes les plus maritimes.

2. *Influence des sels minéraux.* — Par la méthode des cultures en solution nutritive (solution complète de Knop), comparées avec les cultures dans l'eau distillée, M. Dassonville (**37**) a constaté, notamment pour l'Avoine et le Blé, que la solution de Knop augmente le nombre des nervures et favorise le développement du mésophylle ; il y a très peu de sclérenchyme.

Dans l'eau distillée apparaissent des massifs de fibres scléri-fiées, extralibériennes et intraligneuses; le mésophylle est aussi sclérifié; l'épiderme est fortement cutinisé ; il existe de nombreux poils à parois épaisses.

Les modifications produites peuvent être tellement profondes que les feuilles de ces deux graminées acquièrent ainsi une structure identique quand elles sont cultivées dans le même milieu, et deviennent très dissemblables dans des milieux différents.

3. *Influence du climat alpin.* — En fragmentant des souches d'individus de plaine pouvant supporter des altitudes élevées et les transportant ensuite dans les montagnes, M. Bonnier (1) arrive aux conclusions suivantes :

Les feuilles sont en général plus petites, sauf parfois dans la région subalpine, plus poilues, plus épaisses relativement à leur surface et souvent même plus épaisses en valeur absolue, d'un vert plus foncé; le limbe des feuilles acquiert des tissus assimilateurs mieux disposés pour les fonctions chlorophylliennes; le tissu en palissades y est plus développé, soit parce que ces cellules sont plus longues et plus étroites, soit parce que le nombre des rangées palissadiques est plus considérable; de plus, les cellules renferment un plus grand nombre de grains de chlorophylle, et chaque grain de chlorophylle y a souvent une teinte plus verte ; lorsqu'il y a des canaux sécréteurs, ils sont, relativement ou absolument, d'un diamètre plus grand; l'épiderme est moins modifié que celui de la tige ; il est cependant en général

(1) G. Bonnier, *Recherches expérimentales sur l'adaptation des plantes au climat alpin*, in Ann. de la Soc. des sc. nat., 7e série, t. XX, 1895.

mieux marqué, surtout chez les feuilles persistantes qui montrent en outre des cellules sous-épidermiques protectrices mieux développées; les cellules de l'épiderme sont ordinairement plus petites et souvent le nombre de stomates par unité de surface est plus grand, surtout sur la face supérieure du limbe, comme M. Wagner l'a fait remarquer le premier (1).

Le pétiole des feuilles fait voir des modifications qui sont généralement analogues à celles que les tiges subissent, mais beaucoup moins accentuées, c'est-à-dire que le tissu cortical est plus épais par rapport au diamètre du cylindre central; la cuticule de l'épiderme est mieux marquée et les cellules sont à parois plus épaisses; un certain nombre d'assises sous-épidermiques renforcent souvent cet épiderme; les divers tissus du cylindre central sont ordinairement moins différenciés; les stomates sont plus nombreux.

Un cas remarquable est fourni par le *Lotus corniculatus* dont le mésophylle devient tout entier palissadique à 2,600 mètres d'altitude, au Pic du Midi.

4. *Influence de la lumière.* — Dufour (**24**) a montré qu'à la lumière la plus intense, les feuilles acquièrent un limbe plus grand. Ainsi deux feuilles rigoureusement comparables de *Circaea lutetiana* ont acquis un limbe de 2,379 millimètres carrés au soleil, de 1,638 millimètres à l'ombre.

Le mésophylle est plus épais au soleil : le parenchyme palissadique surtout est plus développé, les palissades sont plus longues, plus riches en chlorophylle et amidon; il peut se former de nouvelles assises de palissades : *Fragaria vesca*, *Ligustrum vulgare*. Le parenchyme spongieux n'est guère influencé.

Dans les nervures, les vaisseaux du bois sont plus nombreux et plus larges, leurs parois sont plus épaisses, le liber est plus abondant, le sclérenchyme et le collenchyme sont plus développés.

(1) Wagner, *Zur Kenntniss des Blattbaues der Alpenpflanzen und dessen biologischer Bedeutung.* (Sitz. d. kais. Akad. d. Wiss. in Wien, Bd II, Abth. I, 1892.)

L'épiderme a, au soleil, des cellules plus hautes, à parois extérieures et latérales plus épaisses; ces dernières sont moins sinueuses et ont une tendance à devenir rectilignes : *Tussilago Farfara.*

Enfin, en comparant des régions identiques de feuilles comparables, on constate que le nombre de stomates est plus considérable au soleil quand ils existent à la face supérieure (*Tussilago*). A la face inférieure, il existe encore plus de stomates au soleil.

Remarquons que l'humidité du sol tend aussi à produire des feuilles plus grandes.

5. *Influence de l'eau.* — Askenasy, en 1870 (1), s'est spécialement occupé du *Ranunculus aquatilis* et a fait ressortir les différences qui existent entre les caractères morphologiques de cette plante dans son milieu habituel et ceux que l'on observe quand cette plante végète dans l'air. Ainsi, les lanières arrondies et filiformes de la plante aquatique prennent la forme de bandelettes aplaties chez la plante aérienne. Le limbe aérien est moins découpé; le mésophylle est bifacial avec une assise de palissades bien caractérisées, un parenchyme spongieux à cellules rameuses, un épiderme à cellules sinueuses avec nombreux stomates à la face interne et très peu à la face externe. Tandis que dans l'eau le mésophylle est homogène, presque sans méats, un épiderme à cellules polyédriques ne portant que quelques stomates à l'extrémité des lanières.

En faisant végéter sous l'eau un individu développé dans l'air, il prend, dans sa région supérieure, tous les caractères de la forme aquatique. Quand les fossés se dessèchent, les individus d'abord immergés sont susceptibles de donner naissance à des pousses nouvelles, qui ont tous les caractères de la plante aérienne.

Ces faits ont été pour la plupart vérifiés par M. Costantin (**22**).

(1) Askenasy, *Ueber den Einfluss des Wachstumsmediums auf die Gestalt der Pflanzen*, in Bot. Zeit., 1870, 28e année.

Si, d'une manière générale, on peut établir un certain nombre de caractères communs aux feuilles des plantes adaptées à la vie aquatique, il importe cependant de faire remarquer que l'adaptation ne se fait pas toujours de la même manière et à un degré égal. Les exemples sont nombreux.

M. Sauvageau (30) fait remarquer que plusieurs Phanérogames marines (*Enhalus, Posidonia*, etc.) ont des feuilles rubanées engainantes sans pétiole, un épiderme dont les parois cellulaires sont rectilignes, sans poils, cuticule très mince, etc. D'autres (*Halophila sp.*) ont les feuilles longuement pétiolées, épiderme à cellules sinueuses, poils sur les deux bases, etc. Ces genres, bien que voisins, vivant dans le même milieu, présentent néanmoins une résistance différente à l'adaptation; on doit dans ce cas admettre l'intervention de l'inertie héréditaire.

Les stomates disparaissent généralement sous l'eau. Dans beaucoup de cas, on peut provoquer à volonté leur disparition en immergeant des portions aériennes de plantes aquatiques. Costantin (22) (1) conclut de là que le milieu exerce une action prépondérante, indépendante de l'hérédité : *Hippuris vulgaris*, *Stratiotes aloides*.

Mer (2) constate la présence de stomates sur les feuilles toujours submergées de *Potamogeton rufescens*, comme Askenasy (3) en a observé sur les cotyles de *Ranunculus aquatilis*. M. Sauvageau (4) fait remarquer que ces cas ne sont pas isolés, mais que les mêmes phénomènes se présentent chez *Zanichellia repens*, *Potamogeton lucens*, *perfoliatus*, *densus*.

Ces stomates immergés doivent être considérés, d'après Schenck (5), comme des organes ataviques. Il faut donc bien que, chez les plantes qui possèdent de tels stomates, l'inertie hérédi-

(1) Voir aussi J. Costantin, *Les végétaux et les milieux cosmiques*. Paris, Alcan, 1898.

(2) E. Mer, *Notes diverses* in Bulletin de la Soc. bot. de France, 1876, 1878, 1880, 1881, 1882, 1883, 1885.

(3) *Loc. cit.*

(4) *Loc. cit.*

(5) Schenck, *Vergleichende Anatomie der submersen Gewächse*, 1886.

taire l'emporte sur l'adaptation au milieu. Parfois la lutte est indécise entre ces deux facteurs : il en est ainsi chez le *Potamogeton lucens*, où certaines feuilles sont parfois dépourvues de stomates.

Sans vouloir faire une étude spéciale de l'influence du milieu sur la morphologie de la feuille dans la famille des Renonculacées, et sans rechercher la nature de l'agent physique ou chimique déterminant la modification, j'ai néanmoins eu l'occasion d'observer quelques faits qui méritent d'être signalés et dont la place est tout indiquée dans ce travail.

Le *Delphinium nudicaule*, originaire du Jardin botanique de Naples (fig. 211), possède un limbe très épais ($0^{mm}9$ à $1^{mm}2$) dans lequel le parenchyme palissadique présente deux séries de cellules distinctement allongées et étroites.

Le même *Delphinium*, provenant d'Édimbourg, a un limbe d'une épaisseur moindre (fig. 210), avec une seule assise de palissades beaucoup plus courtes. Dans les deux cas, le parenchyme spongieux et l'épiderme ne présentent pas de différences sensibles.

A Liége, le *Delphinium nudicaule* possède une structure intermédiaire, mais se rapprochant beaucoup plus du *Delphinium* écossais : notre ciel ne ressemble guère non plus au ciel napolitain (1).

Les *Renoncules terrestres*, qui végètent en pleine lumière, dans les champs, les prairies, les moissons, ont toutes un nombre considérable de stomates à la face externe du limbe et très peu à la face interne. Celles qui croissent sous bois (*R. nemorosus*, *auricomus*, etc.) possèdent des stomates en nombre à peu près aussi considérable sur les deux faces. Le *R. sceleratus*, espèce des endroits marécageux, porte plus de stomates à la face interne de ses feuilles qu'à la face externe. Chez *R. hederaceus*, dont les feuilles sont susceptibles de devenir nageantes, tout au moins

(1) Voir la note au bas de la page 70 du présent Mémoire.

d'une façon temporaire, les stomates disparaissent presque entièrement de la face externe. Enfin, sur les lanières submergées de *R. aquatilis*, ils persistent en très petit nombre, tout à l'extrémité de ces lanières.

Un pétiole de *Caltha palustris*, récolté dans un fossé peu éclairé d'une forêt marécageuse et inondée la plus grande partie de l'année, avait acquis des dimensions relativement considérables en longueur et en grosseur. Le tissu fondamental était constitué par de très grandes cellules, et, sur la coupe transversale, on pouvait compter vingt-quatre faisceaux de différent calibre (fig. 223). Un autre pétiole, développé dans une prairie humide, en pleine lumière, était beaucoup plus court, avait des cellules plus petites et seize faisceaux seulement.

On sait que le *Ranunculus lingua* ne prospère très bien que dans les endroits ombragés, très humides, sous l'eau, au moins l'hiver et au printemps. On obtient alors des pousses de 0^{m}80 à 1^{m}20 d'élévation. Les premières feuilles de la pousse sont des feuilles végétatives nageantes, à gaine ailée, à pétiole très distinct (fig. 322), cylindrique et plus ou moins allongé, à limbe cordé, suborbiculaire ou oblong, sommet arrondi, dont le diamètre atteint 4 à 6 centimètres. Dans les parterres du Jardin botanique de Liége, des feuilles nageantes, devenues aériennes par suite du manque d'eau dans les bassins de végétation, offrent la même configuration extérieure avec une réduction considérable des dimensions, au point que le limbe ne dépasse pas les dimensions d'une pièce de cinquante centimes. Les faisceaux, dans le pétiole, sont au contraire plus développés que dans la feuille nageante avec des éléments libéro-ligneux plus nombreux et un arc de fibres sclérifiées extralibériennes qui fait défaut dans le milieu aquatique. L'hypoderme devient collenchymateux. Dans le limbe, le mésophylle de la feuille nageante est homogène, à cellules toutes globuleuses et isodiamétriques sur la coupe transversale (fig. 324), irrégulières quand elles sont vues de face sous l'épiderme. Celui-ci est équifacial, à cellules sinueuses, avec stomates sur les deux faces, mais très peu à la face externe. La feuille, devenue aérienne, prend un mésophylle

bifacial à parenchyme palissadique unisérié et méatique, se composant de grandes cellules plus ou moins allongées, souvent renflées aux extrémités, mais non rameuses, et irrégulières vues sous l'épiderme. Le parenchyme spongieux est à grandes cellules ramifiées. L'épiderme se compose de cellules très sinueuses et les stomates sont également répartis sur les deux faces.

Le *Ranunculus acris* et le *R. arvensis* croissant dans un jardin cultivé, bien fumé, possèdent des segments foliaires plus amples et surtout plus larges, avec moins de découpures que lorsqu'ils poussent dans les champs et les moissons. Néanmoins, le mésophylle et l'épiderme ne subissent que de légères modifications, portant spécialement sur la macrocytie.

La feuille d'*Aquilegia vulgaris*, prise sur des pieds spontanés provenant de stations différentes et éloignées, se présente avec une structure très sensiblement constante. Sur des pieds cultivés dans les jardins botaniques et étiquetés *A. vulgaris*, la structure du mésophylle se montre plus variée; les modifications portent surtout sur l'épaisseur du limbe, les dimensions des cellules, le nombre des assises en palissades (2 ou 3) (fig. 118 et 119). Ces différences peuvent provenir de deux causes : des conditions nouvelles et plus ou moins variables dans lesquelles se trouvent les plantes à l'état de culture; des croisements possibles entre espèces affines et variétés horticoles qui, dans les jardins botaniques, sont rapprochées côte à côte. On sait d'ailleurs combien il est difficile de déterminer exactement les espèces et les variétés du genre *Aquilegia*. Il est probable que plusieurs plantes étiquetées *A. vulgaris* ne sont pas d'origine pure, surtout celles du commerce. Ce qui semble justifier que, dans le cas dont il s'agit ici, les conditions d'éclairage n'ont qu'une faible influence modificatrice sur la structure du mésophylle, c'est que les Ancolies se développent de bonne heure et que le mésophylle est déjà différencié au moment de la feuillaison des arbres voisins. Il faut alors admettre que l'hybridation et surtout le métissage ont une action prépondérante. Ce qui tend à le prouver, c'est que nos prétendus *A. vulgaris* sont notablement différents les uns des

autres par la couleur de leurs fleurs, l'existence de fleurs simples et de fleurs doubles, la taille, etc.

Ce qui précède s'applique également aux *Aquilegia alpina*, *chrysantha*, *Skinneri*, etc., très polymorphes dans nos cultures et dont la détermination exacte devient d'une extrême difficulté.

Les *Thalictrum* présentent également dans la structure de leur limbe des variations profondes, qui dépendent non seulement du milieu, mais encore de la hauteur de l'insertion de la feuille sur la pousse et aussi de l'âge de cette feuille. En effet, chez beaucoup de *Thalictrum* que j'ai examinés, la différenciation histologique est souvent tardive dans les parenchymes du mésophylle. On conçoit dès lors que tel auteur ait pu décrire des palissades isodiamétriques ou nulles chez une espèce donnée, et tel autre des palissades allongées dans la même espèce. En outre, la différenciation n'a pas lieu avec la même intensité et simultanément dans toutes les feuilles de la même pousse. Il y a donc là des causes d'erreur qui compliquent singulièrement l'évaluation des caractères spécifiques dans le genre *Thalictrum*. Et si l'on tient compte que le pilosisme subit aussi l'influence du milieu (p. 57), que la présence des stipelles et des stipellules ne peut être utilisée comme signe caractéristique (**21**, p. 101), on comprendra aisément la grande difficulté que l'on éprouve lorsque l'on veut distinguer toutes les espèces de ce genre, aussi bien par la morphologie interne que par la morphologie externe. Il me paraît donc tout au moins utile, si pas indispensable dans la plupart des cas, de faire une étude approfondie de tous les caractères histologiques des espèces végétales, dans les différentes stations où ces espèces se développent normalement, avant de songer à faire une application de ces caractères à la botanique systématique. On pourra par ce moyen s'assurer que s'il existe des genres où les espèces ne peuvent pas être actuellement bien délimitées, où les caractères des organes végétatifs se modifient aisément sous l'influence de l'épharmonisme, par contre il en existe d'autres (*Helleborus*, *Anemone*, etc.) où la caractéristique spécifique est plus facile à établir et où les individus résistent avec beaucoup plus d'énergie à l'influence des agents physiques ou chimiques.

Il résulte donc de ce qui précède, que la plupart des caractères anatomiques sont susceptibles de variations et peuvent subir, d'une façon plus ou moins profonde, l'influence du milieu. Malgré ces variations, Vesque a néanmoins constaté :

1° que la structure des plantes *spontanées* est fort peu variable sous l'influence du milieu, ce qui tient en grande partie à l'inconstance du milieu lui-même. Chez ces plantes, la lutte pour l'existence a dû contribuer singulièrement à la fixation des caractères anatomiques;

2° que les caractères anatomiques d'adaptation sont d'autant plus constants que la plante est adaptée à des conditions plus extrêmes;

3° que la variabilité est elle-même un caractère de l'espèce.

Malgré cette variabilité, qui atteint tout aussi bien les caractères morphologiques externes que les caractères morphologiques internes, il n'est pas permis de négliger ces derniers dans la botanique descriptive ni d'accorder la priorité aux uns plutôt qu'aux autres. Tous doivent être également pesés dans leur évaluation par des monographes à la fois systématiciens et anatomistes.

II. — ANATOMIE SYSTÉMATIQUE DES RENONCULACÉES DANS L'ÉTAT ACTUEL DE NOS CONNAISSANCES.

Vesque (**17**) a résumé les caractères de la famille des Renonculacées, tirés spécialement des feuilles :

« Poils simples, unicellulés, à parois minces ou épaisses;

» Stomates entourés de plusieurs cellules épidermiques irrégulièrement disposées et ne laissant pas reconnaître le mode » de formation de la cellule mère spéciale;

» Cristaux nuls ou en oursins;

» Faisceaux présentant souvent une section particulière, le » bois embrassant le liber mou, en forme d'arc ou de croissant;

» Laticifères et autres organes glanduleux nuls. »

Solereder (**38**) a signalé en outre un caractère des ponctuations des vaisseaux qui sont toujours simples, sauf chez les Pivoines : la présence de poils ordinaires ou poils de revêtement (*Deckhaaren*) et de poils glanduleux (*Drüsenhaaren*).

Il a relevé également certaines particularités des palissades qui peuvent être simples ou rameuses dans les genres *Aconitum*, *Anemone*, *Caltha*, *Paeonia* et *Trollius*, exemples auxquels j'ajouterai les genres *Adonis*, *Clematis*, *Garidella*, *Nigella* et *Delphinium sp.*

De plus, la feuille la plus complète comprend une gaine, un pétiole et un limbe; exceptionnellement, le pétiole manque et le limbe est sessile sur la gaine : *Adonis vernalis* et *A. volgensis*, *Clematis integrifolia*. La gaine a une insertion de 360°, tout au moins au premier stade, dans le bourgeon, sauf dans les Clématites.

Malgré le nombre relativement faible d'espèces qu'il m'a été possible d'examiner jusqu'à ce jour, je crois néanmoins bien faire en formulant dès à présent quelques conclusions relatives aux caractères des genres. Elles serviront tout au moins à guider les

recherches à faire dans les espèces restantes et elles pourront d'ailleurs être modifiées au besoin.

Dans les Potamées, selon M. Sauvageau (**30**), la structure des feuilles ne conduit pas toujours à un groupement correspondant à celui des genres établis d'après les caractères tirés des fleurs. D'une manière générale, il n'en est pas de même dans la famille des Renonculacées. La plupart des genres primitivement établis par l'étude comparée des organes floraux sont caractérisables par la morphologie de la feuille végétative la plus complète; quelques genres seulement font exception, comme on le verra bientôt, et ces genres sont précisément ceux dont la suppression a été déjà proposée par des botanistes qui n'ont considéré que les caractères fournis par les fleurs et les fruits.

Dans certains genres, la feuille a une tendance à prendre une allure uniforme pour toutes les espèces : *Thalictrum*, *Aquilegia*, *Paeonia*, *Aconitum*, etc. Dès lors, il n'y a pas de caractères spécifiques facilement appréciables. Inversement, dans d'autres genres, les feuilles se rattachent à plusieurs types de structure et les espèces sont caractérisables par la morphologie des feuilles : *Delphinium*, *Ranunculus*, *Anemone*, *Helleborus*, etc.

Je résumerai ci-après les caractères qui m'ont paru les plus constants dans chaque genre, et je suivrai, pour l'énumération de ces genres, l'ordre du Prodrome de De Candolle.

Trib. I. — Clematideae.

Clematis.

Ce genre comprend des espèces à feuilles opposées dont le limbe foliaire est nettement monacrone et simple (*C. integrifolia*, fig. 307) ou monacrone composé (*C. Flammula*, fig. 300). D'autres espèces à limbe triséqué représentent un type intermédiaire entre le limbe monacrone et le limbe triacrone. (Voir pp. 93 à 96.)

La gaine possède une insertion de 180° et est non ailée; elle reçoit toujours trois faisceaux de la tige.

Dans le pétiole existent un arc externe et un arc interne de

faisceaux. A la base du limbe, on ne trouve pas de voûte anastomotique complexe, mais simplement des bandes libéro-ligneuses transversales allant de l'arc interne à l'arc externe, et formant une sorte de « nœud » (fig. 303, 304 et 309). De plus, à ce niveau, il n'y a jamais de trifurcation proprement dite du faisceau médian. Dans chaque foliole, les nervures principales convergent vers le sommet (fig. 300). Ce dernier caractère se retrouve également dans une plante appartenant à un genre voisin : *Naravelia zeylanica* DC.

Au point de vue histologique, le mésophylle est bifacial, avec palissades rameuses ou non rameuses. Des stomates à la face externe seulement.

Les poils sont dimorphes : les uns sont courts, claviformes ; les autres allongés, cylindriques et souvent avec un épaississement unilatéral.

Le type monacrone composé des Clématites s'écarte de celui des Nigelles-Garidelles par la présence d'un arc interne de faisceaux dans le pétiole et l'existence d'une légère complication anatomique à la base des rachis secondaires.

Trib. II. — Anemoneae.

Thalictrum.

Le limbe est triacrone composé (1) ; le pétiole est souvent strié et la gaine, ailée ou auriculo-ailée, reçoit un nombre indéterminé et variable de faisceaux : 11 à 25 et même plus. Les auricules sont généralement vascularisées par un ou plusieurs marginaux extrêmes qui vont s'y terminer en pointe libre.

A la base du limbe existe une voûte anastomotique très complexe, sur laquelle s'insèrent les faisceaux des trois rachis primaires.

Comme caractères histologiques saillants, il importe de mettre en relief d'abord la forme caractéristique du faisceau

(1) Quelques rares espèces ont un limbe simple.

dans la région inférieure de la gaine (p. 56, fig. 148); ensuite le peu d'épaisseur du mésophylle dans lequel la chlorophylle est également répandue; enfin la disposition des cellules du parenchyme palissadique laissant entre elles des méats excessivement étroits. De plus, les cellules du parenchyme spongieux ne sont pas ramifiées, comme on l'observe généralement partout ailleurs (p. 56, fig. 149 et 150).

Les stomates sont localisés à la face externe.

Les *Thalictrum* semblent caractérisés par l'existence de poils capités (p. 57, fig. 153), entourés de cellules circumpilaires différenciées en une petite rosace (fig. 154) autour de la base du poil et susceptible de se soulever en piédestal. Certaines espèces portent en outre des poils cylindriques, unicellulaires ou pluricellulaires-uniséries (fig. 155, 156); ce dernier caractère n'existe pas, à ma connaissance, dans les autres genres de la famille.

Par leur limbe triacrone, leurs poils dimorphes entourés d'une rosace de cellules circumpilaires souvent soulevées, les *Thalictrum* se rattachent aux Anémones. Mais ils présentent beaucoup plus d'affinités avec les *Actaea-Cimicifuga*.

Anemone.

Le limbe des feuilles d'Anémone est triacrone, simple ou composé. Dans ce dernier cas, les trois rachis primaires sont égaux ou inégaux. La gaine présente deux aspects distincts : elle est courte et auriculée, ou bien longue et ailée et alors parfois, mais rarement, auriculée et à auricules vascularisées, comme chez les *Thalictrum*.

Le nombre des faisceaux sortant dans la feuille est variable. Dans le pétiole, il se trouve toujours un arc externe et un arc interne et même parfois des faisceaux dans le *Tf.* interne: *A. nemorosa* (fig. 59) et *japonica* (fig. 92).

A la base du limbe, le faisceau M se trifurque, et il existe un nœud dont la complication augmente en raison directe du développement des trois rachis primaires. Chez *A. nemorosa*, la voûte

anastomotique est due, en partie tout au moins, aux faisceaux du *Tf.* interne.

Le mésophylle est bifacial, à palissades fréquemment rameuses ou irrégulières, présentant parfois la forme d'un H (fig. 103,104).

Les poils sont dimorphes, même trimorphes chez certaines espèces (pp. 31 et 41, fig. 66 et 69), avec cellules circumpilaires formant rosace et souvent soulevées en piédestal (fig. 106).

Les caractères qui précèdent ne s'appliquent pas aux *A. Pulsatilla* L. et *pratensis* L. Celles-ci diffèrent des autres Anémones par plusieurs caractères qui semblent ainsi justifier le maintien du genre *Pulsatilla* Miller (Sect. I : *Pulsatilla*, Prodr. DC., p. 16). D'abord la forme pennée du limbe (voir pp. 37 à 42), ensuite l'absence du « nœud » à la base du limbe, enfin l'existence d'un parenchyme spongieux très dense et à petites cellules, et de palissades non rameuses allongées, tibiaeformes (fig. 102). De plus, les stomates sont aussi nombreux à la face interne qu'à la face externe.

Si les vraies Anémones présentent dans leur limbe foliaire le type triacrone dans toute sa pureté, les Pulsatilles s'en écartent par l'allongement du rachis médian, qui conduit à la feuille pennée, pour se rapprocher ainsi du type monacrone composé des Nigelles et des Garidelles, vers lesquelles elles établissent la transition (p. 42).

Hepatica.

L'*Hepatica triloba* ne diffère des Anémones que par son mésophylle, qui est presque homogène, par ses palissades aplaties et non rameuses, par l'existence de stomates sur les deux faces du limbe et par les cellules circumpilaires non disposées en rosace.

Ces caractères ne me paraissent pas suffisants pour justifier la séparation des Hépatiques du genre Anémone. On sait que la concrescence des trois segments à la base du limbe des *Hepatica* se retrouve chez certaines espèces d'Anémones, notamment *A. palmata* L.

Adonis.

Ce genre renferme des espèces annuelles à feuilles pétiolées, limbe monacrone composé, gaine à auricules multifides (fig. 1) et des espèces vivaces à feuilles sessiles, limbe polacrone composé, basipète, où les auricules ne sont guère discernables des segments du limbe (fig. 11 et 19).

Trois ou cinq faisceaux sortent dans la feuille et se disposent toujours sur un seul arc dans le pétiole et les rachis.

Jamais de nœud anastomotique à l'insertion des rachis secondaires.

Mésophylle toujours bifacial, épiderme équifacial, des stomates à la face externe (voir pp. 17, 20 et 21), des poils dimorphes et peu nombreux.

Les espèces annuelles ne peuvent se distinguer les unes des autres par des caractères tirés de la morphologie des feuilles.

Myosurus.

Feuille à limbe monacrone simple, sans limite bien nette entre le limbe et le pétiole, de même qu'entre le pétiole et la gaine. Celle-ci reçoit trois faisceaux et est non ailée.

Le mésophylle est homogène, l'épiderme équifacial; stomates sur les deux faces.

Poils nuls ou, dans tous les cas, très rares (p. 25).

Ceratocephalus.

C'est la feuille du *Myosurus* à limbe simple ou rameux dans le haut, à mésophylle bifacial.

Des poils cylindriques allongés.

Ranunculus.

Les nombreuses espèces de Renoncules peuvent être rattachées à trois sections principales :

1° Les Renoncules dont les feuilles possèdent un limbe monacrone simple, entier ou presque entier. La gaine est ailée.

Il n'y a pas de séparation morphologique, tant interne qu'externe, bien précise entre les trois régions de la feuille.

Le nombre des faisceaux sortant de la tige est variable. Ils se disposent toujours sur un seul arc dans le pétiole. Le mésophylle est bifacial ou homogène. Les stomates sont répartis sur les deux faces et les poils monomorphes;

2° Les Renoncules à feuilles découpées en lanières ou Renoncules aquatiques ont un limbe triacrone, à segment médian plus courtement rachidé et moins développé que les latéraux, gaine courte et auriculée recevant trois faisceaux de la tige. Le bois primaire du faisceau médian est remplacé par une lacune.

Le mésophylle est homogène, presque sans méats; l'épiderme à cellules polyédriques riches en chlorophylle.

Les stomates sont nuls et les poils monomorphes. Ceux-ci existent toujours à l'extrémité des lanières du limbe;

3° Les Renoncules de cette section (1) sont caractérisées par un limbe basipète à trois, cinq ou sept segments sessiles ou rachidés, libres ou concrescents à la base; les découpures de chaque segment sont variables et des variations profondes peuvent se manifester dans chaque espèce. La gaine est ailée et presque toujours auriculée. Le nombre des faisceaux reçus par la feuille est variable; quand il y en a plus de trois ou cinq, ce nombre peut s'élever jusqu'à trente. Dans le pétiole, ils sont toujours disposés sur deux arcs.

A la base du limbe existe une sorte de nœud produit par la trifurcation et la bifurcation des faisceaux principaux : il n'y a une voûte anastomotique que chez *R. platanifolius* (p. 112).

Le facies du faisceau médian des Renoncules est typique (p. 112 et fig. 385 à 389).

Le mésophylle est nettement bifacial, à palissades non rameuses.

(1) Cette troisième section renferme principalement les Renoncules terrestres. Les Renoncules des lieux humides ou des endroits marécageux (*R. hederaceus*, *sceleratus*, etc.) participent à la fois des caractères de la deuxième et de la troisième section, entre lesquelles elles établissent la transition.

Il y a toujours des stomates sur les deux faces, mais, généralement (p. 114), ils sont moins nombreux à la face interne. Les poils sont monomorphes et les cellules circumpilaires sont, dans la grande majorité des cas, disposées en rosace et parfois soulevées en piédestal, surtout sur le pétiole (fig. 383, 390, 391 et 392).

Oxygraphis (*R. cymbalariae,* Prodr., n° 59, p. 33).

L'espèce unique de ce genre est une Renoncule de la troisième section, qui ne peut en être séparée par les caractères tirés de la feuille. Sa place est bien déterminée entre le *R. hederaceus* et les Renoncules terrestres.

Ce genre n'existe pas dans le Prodrome.

Ficaria.

La feuille de la Ficaire est une feuille d'Oxygraphis plus développée (pp. 77 et 78).

Le genre *Ficaria* pourrait bien rentrer dans le genre *Ranunculus,* comme Linné l'admettait.

Caltha.

La feuille de *Caltha* rappelle, par sa configuration extérieure, une feuille de Ficaire plus ample et plus développée. Les feuilles de ces deux plantes ont encore d'autres caractères communs importants, notamment le faisceau L ramifié en éventail dans le limbe (p. 74), le faisceau M dans l'axe du pétiole ou très près de cet axe, la présence de stomates en nombre à peu près égal sur les deux faces, et le mésophylle bifacial.

Ce qui distingue spécialement la feuille du *Caltha*, c'est d'abord la section transversale orbiculaire de son faisceau médian (fig. 226), ses palissades rameuses ou non rameuses, et surtout sa gaine longuement vaginée dans le bourgeon (fig. 214).

Les poils sont monomorphes.

C'est surtout par sa gaine vaginée et par ses palissades rameuses que le *Caltha* se rattache au *Trollius.*

Trollius.

La feuille se compose d'un limbe polacrone basipète à cinq ou sept segments lobés et dentés, d'un pétiole subcylindrique, d'une gaine qui, dans le bourgeon, offre beaucoup d'analogie avec celle du *Caltha* (p. 61, fig. 168 et 169).

Le mésophylle est bifacial, à palissades rameuses ou non rameuses. L'épiderme est aussi bifacial. Les stomates n'existent qu'à la face externe. Les poils sont dimorphes.

Par la présence de plusieurs feuilles végétatives complètes sur la même pousse, par la forme du limbe, les caractères du mésophylle et des stomates, le *Trollius* se rattache aux Aconits. Il s'en écarte par la forme de la gaine et le dimorphisme pilaire.

Eranthis.

Le limbe de la feuille végétative est triacrone, à segments sessiles, les latéraux larges et profondément bifides, simulant cinq segments disposés en rayonnant autour de l'axe du pétiole, ce qui est corrélatif à la subcylindricité du pétiole; ce dernier caractère est commun avec le *Trollius*.

La gaine est non ailée et reçoit trois faisceaux.

Helleborus.

Les feuilles d'Hellébores ont un limbe polacrone basipète, pédatiséqué, plus rarement triacrone, à segments sessiles ou subsessiles, les marginaux obscurément et inégalement rachidés (pp. 80 et suivantes).

La gaine est peu ailée ou non ailée et reçoit de sept à onze faisceaux. Il n'y a pas de faisceaux à la face interne du pétiole, mais comme les faisceaux de l'arc externe sont disposés en fer à cheval, les deux branches peuvent se rapprocher par leurs extrémités quand le pétiole devient subcylindrique. Cette particularité se présente également chez les Pivoines.

Le parcours à la base du limbe et dans le limbe présente certaines particularités décrites précédemment (pp. 80, 84 et 86). Mais il n'a pas de véritable nœud entre le pétiole et le limbe.

Le faisceau médian, dans le pétiole, présente sur sa coupe

transversale une figure elliptique allongée avec une zone cambiale droite ou à convexité extérieure. Ce caractère est à mettre en relief dans la famille des Renonculacées et permet de reconnaître une Hellébore par ses faisceaux pétiolaires (fig. 269). De plus, les éléments du bois sont à calibre fort étroit.

Il faut aussi accorder une mention spéciale aux cellules épidermiques du pétiole, qui ont les parois latérales épaisses et ponctuées. Ce caractère existe aussi souvent dans les cellules de l'épiderme du limbe (fig. 249, 250, 272). La cuticule est toujours épaisse, ridée ou chagrinée.

Isopyrum.

Limbe triacrone composé. Gaine allongée et auriculée recevant trois faisceaux.

Le mésophylle est bifacial, les palissades non rameuses, les stomates répartis sur les deux faces. Poils monomorphes, d'ailleurs très rares.

Garidella.

Feuille végétative principale, à limbe monacrone composé et gaine non ailée recevant trois, beaucoup plus rarement cinq faisceaux. Ceux-ci n'existent jamais à la face interne du pétiole.

Le mésophylle est bifacial, à palissades rameuses ou non rameuses. L'épiderme est équifacial, et les stomates sont répartis sur les deux faces du limbe, mais moins nombreux à la face interne. Les poils sont rares et caducs (voir p. 25).

Le genre *Garidella* ne renferme, comme le genre *Nigella*, que des espèces annuelles. Il ne peut être séparé de ce dernier par des caractères tirés de la morphologie de la feuille.

Nigella.

Caractères des Garidelles.

Aquilegia.

Feuille à limbe triacrone composé dont les segments sont disposés en rayonnant autour de l'axe du pétiole. Celui-ci est subcylindrique. La gaine est auriculo-ailée et reçoit onze à

quinze faisceaux. Ceux-ci ne forment un arc interne que dans la région tout à fait supérieure de la gaine (p. 47).

Dans le pétiole, les faisceaux sont disposés sur un cercle presque régulier et entourés d'un étui sclérenchymateux dans le tissu fondamental externe (fig. 116).

A la base du limbe existe une voûte anastomotique complexe (fig. 117).

Le mésophylle est bifacial, à palissades non rameuses, bi- ou trisériées.

L'épiderme est bifacial, à cuticule bombée.

Les stomates n'existent qu'à la face externe. Les poils sont dimorphes.

Delphinium.

Ce genre comprend des espèces annuelles et des espèces vivaces. Les espèces annuelles sont reliées aux *Adonis* par le *D. Ajacis :* absence d'arc interne de faisceaux dans le pétiole; poils dimorphes peu nombreux, etc.

Les espèces vivaces ont un limbe polacrone simple, basipète, une gaine non ailée ou peu ailée.

Il n'y a généralement que trois faisceaux qui sortent dans la feuille.

Le mésophylle est bifacial, à palissades variables.

Les stomates n'existent qu'à la face externe. Poils variables (p. 70).

Aconitum.

Limbe, gaine, nombre de faisceaux, parcours et stomates comme dans les Delphinium vivaces.

Les palissades sont rameuses ou non rameuses.

Les poils sont monomorphes, cylindriques, aigus.

Les feuilles pérulaires rappellent celles du *Trollius.*

Actaea.

Limbe composé triacrone, à rachis primaires égaux ou presque égaux. La gaine est courte et faiblement auriculée. Les faisceaux

sont très nombreux dans la gaine et le pétiole; ils forment à la base du limbe un réseau anastomotique très compliqué. Un complexus analogue se trouve à l'insertion des rachis d'ordre inférieur.

Le mésophylle est bifacial; les cellules qui correspondent au parenchyme palissadique sont courtes et isodiamétriques. L'épiderme est équifacial. Des stomates à la face externe seulement. Poils cylindriques aigus.

Sur une pousse, il n'y a qu'une seule feuille végétative au-dessus de la pérule.

La feuille d'*Actaea* offre une certaine analogie avec la feuille d'*Aquilegia*, résultant surtout de l'égalité de leurs trois rachis primaires. Par la prédominance du rachis médian, on passe à la feuille du *Cimicifuga fœtida*, du *C. racemosa* et de la plupart des *Thalictrum*. Les *Cimicifuga* et les *Thalictrum* ont plusieurs feuilles végétatives, mais d'inégale importance sur la même pousse.

Cimicifuga.

Analogie frappante avec *Actaea* quant aux caractères des feuilles.

Ce genre n'existe pas dans le Prodrome.

Paeonia.

Les Pivoines ont un limbe triacrone composé. Elles sont surtout caractérisées par des faisceaux mal individualisés, qui sont plutôt des fragments de la couronne libéro-ligneuse de la tige sortant dans la feuille (p. 88, fig. 276). Ces massifs libéro-ligneux ont parfois une section transversale concentrique dans le bas de la gaine (fig. 282).

Il n'y a pas de faisceaux à la face interne du pétiole, à moins que, comme dans les Hellébores, les extrémités de l'arc interne ne se rapprochent l'une de l'autre, ce qui est le cas des espèces à pétiole cylindrique (fig. 288).

A la base du limbe, il n'existe ni voûte anastomique ni arcs transversaux proprement dits, donc pas de nœud.

La zone cambiale est arquée, mais avec convexité extérieure.

Le mésophylle est bifacial, à palissades courtes, irrégulières, rameuses, parfois aplaties. Des stomates à la face externe seulement. Une seule sorte de poils. Souvent des cristaux.

Les genres *Paeonia* et *Helleborus* ont plusieurs caractères anatomiques qui leur sont communs. L'un et l'autre semblent former, par la morphologie de leurs feuilles, un groupe distinct dans la famille des Renonculacées.

CONCLUSIONS.

Il y a des conclusions importantes à tirer de ce qui précède :

1° Les genres sont caractérisés, dans les Renonculacées, non seulement par les organes floraux, mais aussi par leurs organes végétatifs, spécialement par les feuilles.

2° Certains genres résistent mieux que d'autres aux influences du milieu, et ce sont précisément ceux où les espèces présentent le moins de formes intermédiaires et sont par conséquent caractérisables par la morphologie des organes végétatifs.

3° Il est préférable de n'étudier la structure des végétaux que dans leurs stations naturelles seulement; la culture introduit de nouvelles causes de variation.

4° L'anatomie de la feuille pourra trancher certaines divergences de vues qui existent entre les systématiciens en fournissant des arguments nouveaux à ceux qui veulent la suppression de genres contestables ou la justification de genres contestés. Ainsi il résulte de mes observations que, d'une part, le genre *Hepatica* n'est pas suffisamment caractérisé par ses organes végétatifs pour justifier son existence distincte du genre *Anemone;* il en est de même des *Nigella-Garidella,* des *Actaea-Cimicifuga,* des *Ficaria-Oxygraphis-Ranunculus;* que, d'autre part, les Pulsatilles dans le genre *Anemone,* les *Batrachium* et les Renoncules monacrones dans le genre *Ranunculus* constituent des sections bien établies.

On voit donc que les caractères anatomiques ne bouleversent pas les classifications établies : ils ne font que les confirmer ou les perfectionner. Ainsi entendus, ils ne viennent pas semer la discorde, mais plutôt apaiser les conflits; ces résultats réjouiront ceux qui veulent, et avec raison, lutter contre la dislocation des genres et la « pulvérisation » de l'espèce.

5° L'anatomie aidera, dans la plupart des genres, à classer les espèces; elle pourra même parfois suffire à elle seule pour déterminer le plus grand nombre d'entre elles (*Anemone*, *Delphinium*, *Helleborus*). Dans d'autres genres, aux allures épharmoniques bien définies, où les espèces sont reliées par de nombreuses variétés et formes intermédiaires, où elles sont plus facilement influencées par les causes adaptationnelles, dans ces genres (*Thalictrum*, *Aquilegia*, *Paeonia* et peut-être *Aconitum*), l'anatomie ne parviendra probablement pas à débrouiller le chaos dans lequel les ont laissées nos devanciers les systématiciens.

N'ayant pas étudié *toutes* les espèces d'un genre compliqué, je n'ai pu déterminer la notion de l'espèce d'après mes propres observations. Je n'ai donc pas ici en vue ni l'espèce ancestrale, ni l'espèce primaire, ni l'espèce morphologique, ni l'espèce jordanienne, ni etc., j'appelle tout simplement espèce ce que la plupart des botanistes appellent espèce dans les végétaux supérieurs.

Si l'on insiste aujourd'hui pour que l'anatomiste tienne soigneusement compte de la Systématique, je pense également que les monographies, pour être complètes et parfaites, ne doivent pas rejeter ni dédaigner les investigations anatomiques. L'Anatomie et la Systématique sont deux branches sœurs qui se complètent l'une l'autre et qui doivent marcher la main dans la main.

Et, comme le fait fort bien remarquer John Briquet (1), « établir deux catégories taxinomiques distinctes de caractères, » basées sur les limites du pouvoir visuel de l'homme, serait » pour le moins futile. Que les caractères soient empruntés aux » organes ou aux tissus, c'est toujours de la morphologie que » l'on fait. D'ailleurs les morphologistes ont empiété sur le

(1) J. Briquet, *Observations critiques sur les Conceptions actuelles de l'espèce végétale au point de vue systématique.* (Préface de la Flore des Alpes maritimes, par Burnat.)

» domaine des histologistes et vice versa. Les morphologistes
» font de l'histologie lorsqu'ils distinguent des poils rameux des
» poils simples. »

En résumé, nos devanciers, guidés le plus souvent par leur merveilleux instinct de botanistes classificateurs, ont établi des groupements que l'anatomie, avec les progrès qu'elle a réalisés dans ces derniers temps, confirme le plus souvent d'une manière éclatante.

LISTE ALPHABÉTIQUE DES ESPÈCES CITÉES.

Aconitum *Anthora* L., *lycoctonum* L., *Napellus* L., *variegatum* L.

Actaea *spicata* L.

Adonis *aestivalis* L., *autumnalis* L., *flammeus* Jacq., *vernalis* L., *volgensis* Stev.

Anemone *apennina* L., *coronaria* L., *fulgens* J. Gay, *hortensis* L., *japonica* S. et Z., *nemorosa* L., *pratensis* L., *Pulsatilla* L., *ranunculoides* L., *stellata* Lam., *sylvestris* L., *virginiana* L.

Aquilegia *alpina* L., *chrysantha* hort., *Skinneri* Hook, *vulgaris* L.

Caltha *palustris* L.

Ceratocephalus *falcatus* L.

Cimicifuga *fœtida* L.

Clematis *angustifolia* Jacq., *erecta* All., *Flammula* L., *heracleaefolia* DC., *integrifolia* L., *Stans* S. et Z., *Vitalba* L.

Delphinium *Ajacis* L., *elatum* L., *grandiflorum* L., *nudicaule* Torr., *Staphysagria* L.

Eranthis *hyemalis* Salisb.

Ficaria *ranunculoides* Mönch.

Garidella *Nigellastrum* L.

Helleborus *atrovirens*, *colchicus*, *fœtidus* L., *lividus* Ait., *niger* L., *purpurascens* W. et K., *viridis* L.

Hepatica *triloba* Chaix.

Isopyrum *fumarioides* L.

Myosurus *minimus* L.

Nigella *Damascena* L., *hispania* L., *integrifolia* Reg.

Oxygraphis *cymbalariae* Prantl.

Paeonia *albiflora* Pall., *intermedia* C. A. Meyer, *mollis* And., *Moutan* Sims, *officinalis* L., *tenuifolia* L.

Ranunculus *aconitifolius* L., *acris* L., *amplexicaulis* L., *aquatilis* L., *arvensis* L., *auricomus* L., *bulbosus* L., *divaricatus* Schrk., *Flammula* L., *fluitans* Luck., *gramineus* L., *hederaceus* L., *lanuginosus* L., *Lingua* L., *muricatus* L., *nemorosus* DC., *parviflorus* L., *platanifolius* L., *repens* L., *Sardous* Crantz., *sceleratus* L., *tuberosus* Lapeyr.

Thalictrum *angustifolium* Jacq., *aquilegifolium* L., *calabricum* Spreng, *flavum* L., *fœtidum* L., *glaucum* Desf., *minus* L., var. *dunense* Dmrt., var. *depauperatum* Dmrt.

Trollius *europaeus* L.

RENSEIGNEMENTS HISTORIQUES ET BIBLIOGRAPHIQUES.

1. **Linné**, 1751. Philosophia botanica. Stockholm.

2. **De Candolle**, 1844. Théorie élémentaire de la Botanique, 3e édition.

3. **Trécul**, 1853. Mémoire sur la formation des feuilles, in *Ann. sc. nat.*, 3e série, t. XX, p. 235.

Mémoire très documenté avec organogénie détaillée de nombreuses feuilles appartenant aux Dicotylées et aux Monocotylées. L'auteur distingue quatre types principaux aujourd'hui bien connus : basifuge, basipète, mixte et parallèle.

4. **Clos**, 1857. Les vrilles des *Smilax*, ni folioles, ni stipules, in *Bull. Soc. bot. de France*, t. IV, p. 985.

Ces vrilles ne sont pas articulées à leur base, ce n'est qu'un double prolongement latéral des éléments cellulo-vasculaires du pétiole.

5. **Durieu de Maisonneuve**, 1859. Étude taxonomique de la ligule dans le genre *Carex*, in *Bull. Soc. bot. de France*, t. VI, p. 621.

Il propose de se servir de la ligule comme caractère taxonomique.

6. **Cosson**, 1860. Note sur la stipule et la préfeuille dans le genre *Potamogeton* et quelques considérations sur ces organes dans les autres Monocotylées, in *Bull. Soc. bot. de France*, t. VII, p. 715.

Analogie entre la ligule des Graminées et la *stipule* des Potamots, qui sont toutes deux formées par un organe unique.

7. **Cauvet**, 1865. Probabilité de la présence des stipules dans quelques Monocotylédones, in *Bull. Soc. bot. de France*, t. XII, p. 240.

Les petits filaments de la feuille d'*Althenia filiformis*, les vrilles de *Smilax aspera*, les appendices latéraux du *Tamus communis* sont des stipules.

8. **Cas. De Candolle**, 1868. Théorie de la feuille, in *Archives des sciences de la Bibliothèque universelle de Genève.*

La feuille serait un rameau à la face interne (supérieure) atrophiée; c'est-à-dire un rameau dont le cône terminal serait frappé de stérilité à la fois sur son sommet et sur sa face interne, ce qui est le cas le plus général.

9. **Germain de Saint-Pierre**, 1870. Nouveau dictionnaire de botanique. Paris, Baillière.

10. **Guillard**, 1870. Mémoire sur les organes par lesquels les feuilles rendent à la tige la sève qu'elles ont élaborée, in *Bull. Soc. bot. de France*, t. XVII.

Il entreprend de combler « une grave lacune de l'anatomie végétale »; distingue diverses formes de pétiole d'après la coupe transversale : pétiole cauloïde, hémicaule, grand arc, petit arc. Il groupe les familles des Dicotylées d'après cette coupe et attache une grande importance au nombre.

11. **Sachs**, 1874. Traité de botanique, traduit sur la troisième édition, par Van Tieghem. Paris, Savy.

12. **Lecoyer**, 1876. Notice sur quelques Thalictrum, in *Bull. Soc. roy. bot. de Belgique*, t. XV, p. 112.

Observations sur les poils glandulifères du *T. fœtidum* L.

13. **Lecoyer**, 1877. Étude morphologique sur les *Thalictrum*, in *Bull. Soc. roy. bot. de Belgique*, t. XVI, p. 198.

Donne en détail les caractères du genre et décrit quelques espèces inédites.

14. **Clos**, 1878. Des stipules et de leur rôle dans l'inflorescence et dans la fleur, in *Mém. Acad. des sc. de Toulouse*, septième série, t. X, p. 201.

Fait l'historique de la question des stipules. Il examine les stipules dans chacune des familles du règne végétal et émet une appréciation générale de leur valeur dans les divers degrés de la classification.

15. **Cas. De Candolle**, 1879. Anatomie comparée des feuilles chez quelques familles de Dicotylédones, communiqué à la *Soc. de physique et d'hist. nat. de Genève.*

S'occupe principalement des feuilles chez les plantes ligneuses. Reconnaît comme caractère constant, dans un même genre, la structure ouverte ou fermée du système principal des faisceaux du pétiole. Il en est de même, généralement, de la présence de faisceaux intracorticaux, tandis que la présence de faisceaux intramédullaires constitue une véritable anomalie.

16. **Goebel**, 1880. Beiträge zur Morphologie und Physiologie des Blattes, in *Bot. Zeit.*, 38. Jahrgang, N^r^ 45, pp. 753 et suivantes.

17. **Vesque**, 1881. L'anatomie des tissus appliquée à la classification, in *Nouv. archives du Museum,* 2^e^ série, t. IV.

Donne les caractères des Renonculacées tirés des poils, des stomates, des cellules épidermiques, des cristaux, du mésophylle et des faisceaux Se borne à une coupe au milieu du pétiole.

18. **Vesque**, 1882. Essai d'une monographie anatomique et descriptive de la tribu des Capparées (Capparidées ligneuses), in *Ann. sc. nat.*, 6^e^ série, t. XIII.

19. **Vesque**, 1885. Caractères des principales familles gamopétales tirés de l'anatomie de la feuille, in *Ann. sc. nat.*, 7^e^ série, t. I.

20. **Marié**, 1885. Recherches sur la structure des Renonculacées, in *Ann. sc. nat*, 7^e^ série, t. XX.

C'est une étude anatomique des genres, par quelques coupes isolées dans la racine, la tige, la feuille. Une conclusion : le genre anatomique ne correspond pas toujours au genre morphologique.

21. **Lecoyer**, 1885. Monographie du genre Thalictrum, in *Bull. Soc. roy. de Belgique,* t. XXIV.

Renseignements historiques. Clef analytique des espèces, etc.

22. **Costantin**, 1886. Étude sur les feuilles des plantes aquatiques, in *Ann. sc. nat.*, 7^e^ série, t. III.

Dans l'eau, il y a disparition des stomates et du tissu

palissadique, réduction des éléments fibreux et vasculaires, formation de lacunes, etc.

23. Colomb, 1886. Note sur l'ochrea des Polygonées, in *Bull. Soc. bot de France*, t. XXXIII, p. 506.

C'est un organe complexe formé de deux parties : l'une opposée à la feuille, qui est la gaine de cette feuille; l'autre placée à l'aisselle de la feuille et détachée du pétiole, c'est une ligule.

24. Dufour, 1887. Influence de la lumière sur la forme et la structure des feuilles, in *Ann. sc. nat.*, 7e série, t. V.

Au soleil, les feuilles prennent des dimensions plus considérables, les cellules épidermiques et les palissades sont plus grandes, les stomates plus nombreux, le sclérenchyme et le collenchyme sont plus développés. Il n'existe pas une intensité optimum inférieure à l'intensité de la lumière directe du soleil.

25. Petit, 1887. Le pétiole des Dicotylédones au point de vue de l'anatomie comparée et de la taxinomie. Thèse. Paris.

Étudie plus particulièrement le parcours des faisceaux; attache beaucoup d'importance à la coupe *initiale*, base du pétiole, et surtout à la coupe *caractéristique*, sommet du pétiole

Groupe les parcours en un petit nombre de types et constate que dans les plantes herbacées les faisceaux du pétiole sont isolés et soudés entre eux dans les plantes ligneuses.

26. Colomb, 1887. Recherches sur les stipules, in *Ann. sc. nat.*, 7e série, t. VI.

Propose de nommer stipule tout appendice inséré sur la tige et dont le système vasculaire est exclusivement formé de dérivations empruntées aux faisceaux foliaires. Beaucoup de renseignements sur stipule, ligule, gaine, ochrea.

27. Vuillemin, 1887. A propos d'une récente communication de M. Colomb, in *Bull. Soc. bot. de France*, t. XXXIV, p. 141.

L'ochrea n'est qu'un vestige de l'état primordial auquel s'est substituée la feuille actuelle puissamment développée et différenciée. C'est l'homologue de la gaine

des *Equisetum* et de la gaine en général. La ligule des Graminées peut avoir la même valeur que la partie axillaire de l'ochrea.

28. Lesage, 1889. Influence du bord de la mer sur la structure des feuilles, in *C. R. Acad. des sc.*, 29 juillet, n° 5, p. 204.

Il complète les renseignements fournis autrefois à ce sujet par Duval-Jouve en ce qui concerne l'épaisseur des feuilles, le tissu palissadique, les méats et la chlorophylle.

29. Nihoul, 1891. Contribution à l'étude anatomique des Renonculacées (*Ranunculus arvensis* L.), in *Mém. couronnés et mém. des sav. étr. publiés par l'Acad. roy. des sc. de Belgique*, t. LII.

30. Sauvageau, 1891. Sur les feuilles de quelques Monocotylédones aquatiques, in *Ann. sc. nat.*, 7e série, t. XIII.

Les caractères anatomiques des feuilles sont tantôt suffisants, tantôt insuffisants pour permettre la détermination spécifique. En général, les caractères spécifiques tirés de l'anatomie présentent des points communs pour toutes les plantes appartenant à un même genre; par contre, les caractères génériques de même ordre ne confirment pas le groupement des genres réalisé d'après les caractères tirés de la fleur.

Quelques particularités sur les diaphragmes, l'épiderme, le bois, les stomates, l'ouverture apicale de la nervure médiane, le courant d'eau qui parcourt la feuille.

Voir aussi C. Sauvageau, *Sur les feuilles des Butomées*, id., t. XVII, 1893.

31. Van Tieghem, 1891. Traité de botanique, deuxième édition. Paris, Masson.

32. Vuillemin, 1892. La subordination des caractères de la feuille dans le phylum des *Anthyllis*. Nancy, Berger-Levrault.

33. Chatin, 1893. Commence une série d'articles, terminée en 1898, sur la gradation des espèces végétales, in *C. R. Acad. des sc.*, t. CVI, n° 23, premier semestre et tomes suivants.

La théorie est basée sur la multiplicité des parties homologues, la variété des organes, leur localisation. Il

groupe les classes dans l'ordre de perfection croissante et justifie cet arrangement par des considérations anatomiques : le nombre de faisceaux à l'extrême base du pétiole est le critérium anatomique de perfection organique.

34. Massart, 1894. La récapitulation et l'innovation en embryologie végétale, in *Bull. Soc. roy. bot. de Belgique,* t. XXXIII.

A un point de vue spécial, l'auteur s'occupe de diverses formes de feuilles que l'on rencontre sur une même plante et de nombreux cas d'organogénie. Il passe rapidement sur les questions histologiques.

35. Lenfant, Mansion et **Sterckx,** 1897. Contribution à l'anatomie des Renonculacées : le genre *Delphinium,* le *Thalictrum flavum* L., la tribu des Clématidées, in *Archives de l'Institut bot. de l'Univ. de Liége,* vol. I.

36. O. Spanjer, 1898. Untersuchungen über die Wasserapparate der Gefässpflanzen. Inaugural-Dissertation. Marburg.

Travail d'anatomie avec nombreuses expériences physiologiques sur le tissu épithémial.

Voir la note (3) de la page 76 du présent Mémoire.

37. Dassonville, 1898. Influence des sels minéraux sur la forme et la structure des végétaux, in *Revue scient.* du 16 juillet.

Prouve que la composition chimique du sol a une influence appréciable sur la structure, comme la lumière, la chaleur, etc.

38. Solereder, 1898. Systematische Anatomie der Dicotyledonen.

Ranunculaceae : Caractères anatomiques de la famille tirés des faisceaux, des ponctuations, des vaisseaux, des stomates, des poils, des cristaux, etc.

Il signale aussi l'existence de palissades rameuses dans certains genres, les stomates aquifères et les glandes à matière visqueuse dans les dents des feuilles, la structure anormale de la tige dans les *Actaea,* etc.

39. Gravis, 1898. Recherches anatomiques et physiologiques sur le *Tradescantia virginica* L., in *Mém. couronnés et mém. des sav. étr. publiés par l'Acad. roy. de Belgique,* t. LVII.

PLANCHES.

EXPLICATION DE LA PLANCHE I.

Adonis autumnalis L.

Fig. 1 et 2. — Feuille végétative la plus complète. Pétiole long, remplacé par pointillé, p. 14.

Fig. 3. — Pétiole de la même avec cavité centrale, p. 15.

Fig. 4. — (Schéma.) Extrémité d'un segment (bords en pointillé), p. 15.

Fig. 5. — Faisceau M au milieu du pétiole, p. 15.

Fig. 6. — Section du limbe, p. 16.

Fig. 7. — Épiderme interne (face supérieure), p. 17.

Fig. 8. — Épiderme externe (face inférieure), p. 17.

Fig. 9 et 10. — Feuille de la série régressive, p. 18.

Adonis volgensis Stev.

Fig. 11 et 12. — Feuille végétative la plus complète, p. 19.

Fig. 13. — Section du limbe, p. 20.

Fig. 14. — Épiderme interne, p. 20.

Fig. 15. — Épiderme externe, p. 20.

Fig. 16. — Cellules épidermiques des bords du limbe, vues de face, p. 20.

Fig. 17 et 18. — Feuille de la région inférieure de la tige, p. 20.

Adonis vernalis L.

Fig. 19 et 20. — Feuille végétative la plus complète, p. 20.

EXPLICATION DE LA PLANCHE II.

Garidella Nigellastrum L.

Fig. 21 et 22. — Feuille végétative la plus complète, p. 22.
Fig. 23. — Milieu du pétiole, p. 22.
Fig. 24. — Section d'une partie du limbe, p. 22.
Fig. 25. — Épiderme interne, p. 22.
Fig. 26. — Cellules épidermiques des bords du limbe, vues de face, p. 22.

Nigella Damascena L.

Fig. 27. — Milieu du pétiole, p. 23.
Fig. 28. — Section d'une partie du limbe, p. 23.
Fig. 29. — Épiderme externe, p. 23.
Fig. 30. — Cellules épidermiques des bords du limbe, vues de face, p. 23.

Nigella hispanica.

Fig. 31. — Milieu du pétiole, p. 23.
Fig. 32. — Cellules épidermiques des bords du limbe, vues de face, p. 23.

Ceratocephalus falcatus L.

Fig. 33, 34, 35, 36. — Feuilles végétatives complètes, p. 24.
Fig. 37. — Milieu du pétiole, p 24.
Fig. 38. — Section d'une partie du limbe, p. 24.
Fig. 39. — Épiderme interne, p. 24.

Myosurus minimus L.

Fig. 40. — Feuille végétative la plus complète, p. 25.
Fig. 41. — Section dans la gaine, p. 25.
Fig. 42. — Section dans le pétiole, p. 25.
Fig. 43. — Section dans le limbe, p. 25.
Fig. 44. — Une des feuilles végétatives inférieures, p. 25.
Fig. 45. — (Schéma.) Parcours dans la feuille de la fig. 40, p. 25.
Fig. 46. — Faisceau M au milieu du pétiole, p. 25.
Fig. 47. — Section du limbe montrant les faisceaux M et L, p. 25.
Fig. 48. — Épiderme interne, p. 25.

EXPLICATION DE LA PLANCHE III.

Anemone nemorosa L.

Fig. 49. — Extrémité d'un rhizome fertile, jeune hampe en pointillé, p. 26.

Fig. 50, 51, 52, 53, 54. — États successifs de la feuille végétative, p. 27.

Fig. 55, 56. — Gaine de face et limbe de la même, adultes, p. 28.

Fig. 57. — Parcours schématique, faisceaux centraux non figurés, p. 28.

Fig. 58, 59, 60. — Le bas, le milieu, le sommet du pétiole, p. 29.

Fig. 61, 62. — Coupes au-dessous et au-dessus de la voûte anastomotique, p. 29.

Fig. 63. — Faisceau M au milieu du pétiole, p. 30.

Fig. 64. — Un des faisceaux centraux, p. 30.

Fig. 65, 66. — Le limbe et l'épiderme externe, p. 31.

Fig. 67. — Deux cellules ramifiées du parenchyme spongieux, p. 31.

Fig. 68. — Base d'un poil cylindrique sur une nervure, p. 31.

Fig. 69. — Poils des bords du limbe, p. 32.

Fig. 70. — Base d'insertion de l'involucre adulte, p. 32.

Fig. 71. — La même dans le bourgeon, jeune, p. 33.

Fig. 72. — L'étui ou gaine involucrale et la hampe florale, p. 33.

Fig. 73. — Le segment médian, jeune, de la bractée involucrale, p. 33.

Fig. 74. — Base des trois rachis de la bractée adulte, p. 33.

Fig. 75. — Une feuille souterraine adulte, détachée du rhizome, p. 35.

Fig. 76, 77. — Feuille périulaire inférieure et feuille périulaire supérieure, p. 36.

Fig. 78. — La préfeuille de face, p. 36.

EXPLICATION DE LA PLANCHE IV.

Genre Anemone.

Fig. 79. — *A. hortensis* L. Gaine de la feuille adulte, p. 37.
Fig. 80. — *A. sylvestris* L. id.
Fig. 81. — *A. japonica* S. et T. id.
Fig. 82. — *A. Pulsatilla* L. Limbe adulte, p. 37.
Fig. 83. — *A. pratensis* L. Limbe adulte, p. 37.
Fig. 84. — *A. Pulsatilla* L. Gaine adulte au-dessus de l'insertion, p. 38.
Fig. 85. — *A. Pulsatilla* L. Niveau quelque peu supérieur au précédent, p. 38.
Fig. 86. — *A. hortensis* L. Milieu du pétiole, p. 38.
Fig. 87. — *A. coronaria* L. id.
Fig. 88. — *A. virginiana* L. id.
Fig. 89. — *A. sylvestris* L. id.
Fig. 90. — *A. Pulsatilla* L. id.
Fig. 91. — *A. pratensis* L. id.
Fig. 92. — *A. japonica* S. et L. id.
Fig. 93. — *A. hortensis* L. (Schéma.) Parcours à la base du limbe, p. 38.
Fig. 94. — *A. sylvestris* L. id.
Fig. 95. — *A. coronaria* L. id.
Fig. 96. — *A. Pulsatilla* L. id. p. 39.
Fig. 97. — *A. virginiana* L. Coupe dans la base du limbe, p. 38.
Fig. 98. — *A. japonica* S. et L. Trois coupes dans la base du limbe, p. 39.
Fig. 99. — *Id.* id.
Fig. 100. — *Id.* id.
Fig. 101. — *Id.* Section dans le limbe, p. 40.
Fig. 102. — *A. Pulsatilla* L. Section dans le limbe, p. 40.
Fig. 103. — *A. coronaria* L. Deux cellules palissadiques, p. 40.
Fig. 104. — *A. hortensis* L. Trois cellules palissadiques, p. 40.
Fig. 105. — *A. hortensis* L. Poils coniques des bords du limbe, p. 41.
Fig. 106. — *A. virginiana* L. Coupe dans la base d'un poil cylindrique, p. 41.

EXPLICATION DE LA PLANCHE V.

Hepatica triloba Chaix.

Fig. 107. — Milieu du pétiole, p. 45.
Fig. 108. — Section dans le limbe, p. 45.

Eranthis hyemalis Salisb.

Fig. 109. — Milieu du pétiole, p. 46.
Fig. 110. — Schéma du parcours, base du limbe, p. 46.
Fig. 111. — Section dans le limbe, p. 46.

Aquilegia vulgaris L.

Fig. 112-113. — Deux stades jeunes de la feuille végétative, p. 46.
Fig. 114. — Coupe vers le milieu de la gaine, p. 47.
Fig. 115. — Coupe dans le haut de la gaine, p. 47.
Fig. 116. — Milieu du pétiole, p. 47.
Fig. 117. — Base du limbe avec voûte anastomotique, p. 47.
Fig. 118. — Section dans le limbe : individu spontané, p. 48.
Fig. 119. — Section dans le limbe : individu cultivé, p. 48.
Fig. 120. — Épiderme interne, p. 48.
Fig. 121. — Épiderme externe, p. 48.

Aquilegia alpina L.

Fig. 122. — Coupe dans le bas du pétiole, p. 49.

Actaea spicata L.

Fig. 123. — Souche du printemps de 1898, p. 49.
Fig. 124. — Un stade jeune de la feuille végétative, p. 50.
Fig. 125. — (Schéma.) Parcours dans la *fe* 1 d'une plantule, p. 50.
Fig. 126. — Base du limbe de la même, p. 50.
Fig. 127. — La tige sous l'insertion de la feuille végétative, p. 50.
Fig. 128. — Région inférieure de la gaine, p. 50.
Fig. 129. — Milieu du pétiole, p. 51.
Fig. 130. — Base du limbe, p. 51.

EXPLICATION DE LA PLANCHE VI.

Actaea spicata L. (suite).

Fig. 131. — Le faisceau M au milieu du pétiole, p. 51.
Fig. 132. — Section dans le limbe, p. 51.
Fig. 133. — Quelques cellules du mésophylle spongieux, p. 51.
Fig. 134. — Une feuille pérulaire étalée, p. 52.
Fig. 135. — La feuille pérulaire, son bourgeon avec préfeuille, p. 52.

Cimicifuga fœtida L.

Fig. 136. — Région supérieure de la gaine, p. 53.
Fig. 137. — Milieu du pétiole, p. 53.
Fig. 138. — Faisceau M au milieu du pétiole, p. 53.

Genre Thalictrum.

Fig. 139. — *Th. glaucum* Desf. Base de la gaine, p. 54.
Fig. 140. — *Th. glaucum*. Milieu du pétiole, p. 55.
Fig. 141. — *Th. aquilegifolium* L. Milieu du pétiole, p. 55.
Fig 142 à 145. — *Th. glaucum* Desf. Coupes successives dans la base du limbe, p. 55.
Fig. 146. — *Th. aquilegifolium* L Faisceau M au milieu du pétiole, p. 55.
Fig. 147. — *Th minus* L. Id. id. p. 55.
Fig. 148. — *Th. calabricum* Spr. Faisceau M dans le bas de la gaine, p. 56.
Fig. 149. — *Id.* Section dans le limbe, p. 56.
Fig. 150. — *Th. angustifolium* Jacq. Mésophylle spongieux vu de face, p. 57.
Fig. 151. — *Th. glaucum* Desf. Épiderme interne, p. 57.
Fig. 152. — *Id.* Epiderme externe, p. 57.
Fig. 153. — *Th. minus* L Un poil du limbe, p. 57.
Fig. 154. — *Id.* Épiderme externe ; rosace de cellules circumpilaires, p. 58.
Fig. 155. — *Th. fœtidum* L. Poil, épiderme externe, sur jeune feuille, p. 58.
Fig. 156. — *Id.* Poil, épiderme externe, sur feuille adulte, p. 58.
Fig. 157. — *Th. aquilegifolium* L. Projection, sur section transversale du pétiole, des stipelles de la base des trois rachis primaires, p. 58.
Fig. 158. — *Th. aquilegifolium* L. Projection des stipelles de la base des rachis secondaires, p. 58.
Fig 159. — *Th. aquilegifolium* L. Projection des stipelles de la base des rachis tertiaires, p. 58.

Isopyrum fumarioides L.

Fig. 160. — Gaine adulte, p. 59.
Fig. 161. — (Schéma.) Parcours à la base du limbe, p. 59.
Fig. 162. — Milieu du pétiole, p. 59.
Fig. 163. — Poil au bord du limbe d'une feuille de plantule, p. 59.

EXPLICATION DE LA PLANCHE VII.

Trollius europaeus L.

Fig. 164. — Une pousse d'automne insérée sur une pousse-mère décomposée; elle fleurira au printemps suivant; elle porte des cicatrices des feuilles végétatives de l'été et trois feuilles pérulaires dont l'inférieure a été enlevée; le bourgeon axillaire de celle-ci est en *a*, p. 60.

Fig. 165. — La même dont on a enlevé trois feuilles pérulaires, montrant la jeune tige florifère terminale et le bourgeon axillaire *a'* de la feuille pérulaire supérieure, p. 60

Fig. 166, 167, 168, 169, 170. — Stades successifs de la feuille végétative, p. 61.

Fig. 171. — Gaine de la feuille adulte, p. 61.

Fig. 172. — Limbe de la feuille adulte, p. 61.

Fig. 173. — Coupe dans la gaine, p. 62.

Fig. 174. — Milieu du pétiole, p. 62.

Fig. 175. — (Schéma.) Parcours à la base du limbe, p. 62.

Fig. 176. — Faisceau M au milieu du pétiole, p. 62.

Fig. 177. — Cellules du liber d'un pétiole conservé dans l'alcool absolu pendant trois jours; coupe observée dans l'alcool; cinq cellules annexes, p. 62.

Fig. 178. — Action d'une petite quantité d'eau sur la coupe précédente; trois cellules annexes, p 62.

Fig. 179. — Action de la potasse sur la coupe (fig. 178); quatre cellules annexes, p. 62.

Fig. 180. — Le faisceau M dans la gaine, p. 63.

Fig. 181. — Section dans le limbe, p. 63.

Fig. 182. — Épiderme interne, p. 64.

Fig. 183. — Epiderme externe, p. 64.

Fig. 184. — Poil sur la gaine, face externe, p. 64.

Fig. 185. — Gaine adulte de la feuille végétative aérienne; p. 64.

Fig. 186. — Une des bractées supérieures, p. 64.

Fig. 187. — Une des feuilles pérulaires inférieures, p. 64.

Fig. 188. — Base d'un bourgeon, p. 65.

Genre Aconitum.

Fig. 189. — *A. Napellus*. Souche en novembre; à gauche, cicatrice de la région d'attache avec la pousse-mère, p. 65.

Fig. 190. — *A. Napellus*. La même montrant la feuille pérulaire supérieure, p. 65.

Fig. 191. — *A. Napellus*. La même après avoir enlevé toute la pérule, p. 65.

Fig. 192. — *Id.* La même développée en avril; quatre feuilles végétatives sont adultes; les trois supérieures ne sont pas encore étalées; le bourgeon de remplacement est en voie de développement, p. 65.

Fig. 193. — *A. Napellus*. Stade jeune de la feuille végétative, p. 66.

Fig. 194. — *Id.* Gaine de la même, p. 66.

Fig. 195. — *Id.* Gaine d'une feuille inférieure de la pousse, p. 66.

Fig. 196. — *A. Anthora* L. Milieu du pétiole, p. 67.

Fig. 197. — *A. Lycoctonum* L. Id.

Fig. 198. — *A. Napellus* L. Id.

Fig. 199. — *A. variegatum* L. Id.

EXPLICATION DE LA PLANCHE VIII.

Genre Aconitum (suite).

Fig. 200. — *A. Anthora.* (Schéma.) Parcours à la base du limbe, p. 67.
Fig. 201. — *A. Napellus.* Faisceau M dans le bas de la gaine, p. 68.
Fig. 202. — *A. lycoctonum.* Faisceau M dans le bas de la gaine, p. 68.
Fig. 203 et 204. — *A. lycoctonum.* Section dans le limbe et épiderme externe, p. 68.
Fig. 205 et 206. — *A. Anthora.* Section dans le limbe et épiderme externe, p. 68.

Genre Delphinium.

Fig. 207. — *D. nudicaule.* Milieu du pétiole, p. 69.
Fig. 208. — *D. elatum.* Id. p. 69.
Fig. 209. — *D. Ajacis.* Id. p. 69.
Fig. 210. — *D. nudicaule* (d'Édimbourg). Section dans le limbe, p. 70.
Fig. 211. — *D. nudicaule* (de Naples). Section dans le limbe, p. 70.
Fig. 212. — *D. elatum,* p. 70.
Fig. 213. — *D. Staphysagria.* Les trois formes de poils sur la gaine, p. 70.

Caltha palustris.

Fig. 214. — (Figure demi-schématique.) Une pousse en août. Dans la gaine déchirée de *fe n* — 1, à gauche, son bourgeon axillaire bien développé. Dans le bas, la région d'attache du court rhizome, sur la pousse-mère, p. 72.
Fig. 215 et 216. — Deux stades jeunes de la feuille végétative, p. 72.
Fig. 217. — La même dont la gaine est adulte et le limbe involuté, p. 73.
Fig. 218. — Gaine adulte perforée de la même, p. 73.
Fig. 219. — La même étalée, p. 73.
Fig. 220. — Gaine vers le bas; coupe prise dans un bourgeon, p. 74.
Fig. 221. — Gaine, niveau plus élevé, p. 74.
Fig. 222. — Gaine, niveau plus élevé, p. 74.
Fig. 223. — Milieu d'un pétiole adulte, p. 74.
Fig. 224. — (Schéma.) Parcours à la base du limbe, p. 74.
Fig. 225. — Parcours dans le limbe, p. 74.
Fig. 226. — Faisceau M au milieu du pétiole, p. 75.
Fig. 227. — Faisceau dans la gaine, p. 75.
Fig. 228. — Section dans le limbe, p. 75.
Fig. 229. — Épiderme externe, p. 75.
Fig. 230. — Épiderme de la gaine jeune, avec poils, p. 75.
Fig. 231. — Jeune hampe en septembre, avec sa bractée inférieure et trois boutons à fleur, p. 76.
Fig. 232. — La préfeuille, p. 77.
Fig. 233. — Base de la préfeuille, p. 77.

EXPLICATION DE LA PLANCHE IX.

Ficaria ranunculoides Mönch.

Fig. 254. — Milieu du pétiole, p. 77.
Fig. 255. — Section dans le limbe, p. 78.

Oxygraphis Cymbalariae Prantl.

Fig. 256. — Milieu du pétiole, p. 78.
Fig. 257. — Section dans le limbe, p. 78.

Helleborus fœtidus L.

Fig. 258. — Bourgeon terminal en septembre après avoir détaché les feuilles végétatives supérieures, p. 79.
Fig. 259 et 240. — Deux stades de la feuille végétative, p. 80.
Fig. 241. — Préfoliaison des segments du limbe, p. 80.
Fig. 242. — Milieu du pétiole, p. 80.
Fig. 245. — Parcours à la base du limbe, p. 80.
Fig. 244. — La fe_1 d'une plantule, p. 81.
Fig. 245. — Faisceau M au milieu du pétiole, p. 81.
Fig. 246. — Le même dans la gaine, p. 81.
Fig. 247. — Section dans le limbe, p. 81.
Fig. 248. — Quelques cellules du parenchyme spongieux, p. 81.
Fig. 249. — Épiderme interne, p. 82.
Fig. 250. — Épiderme externe avec souche de poil tombé, p. 82.
Fig. 251. — Un poil, p. 82.
Fig. 252. — Une des bractées inférieures, p. 82.
Fig. 253. — (Schéma.) Parcours à la base du limbe de la même, p. 82.
Fig. 254 et 255. — Autre bractée en place et étalée, p. 82.
Fig. 256 et 257. — Deux bractées de la région moyenne, p. 82.
Fig. 258 et 259. — Deux bractées de la région supérieure, p. 82.
Fig. 260. — Section dans la bractée, figure 259, p. 83.
Fig. 261 et 262. — Épiderme interne de la même et l'assise sous-jacente, p. 83.
Fig. 263 et 264. — Épiderme externe de la même et l'assise sous-jacente, p. 83.

EXPLICATION DE LA PLANCHE X.

Genre Helleborus.

Fig. 265. — *H. niger*. Milieu du pétiole, p. 84.
Fig. 266. — *H. lividus*. Milieu du pétiole, p. 84.
Fig. 267. — *H. viridis*. Milieu du pétiole, p. 84.
Fig. 268. — *H. viridis*. (Schéma.) Parcours à la base du limbe, p. 84.
Fig. 269. — *H. colchicus*. Le faisceau M au milieu du pétiole, p. 84.
Fig. 270. — *H. niger*. Le faisceau M au milieu du pétiole, p. 85.
Fig. 271. — *H. niger*. Section dans le limbe, p. 85.
Fig. 272. — *H. lividus*. Épiderme externe, p. 85.
Fig. 273. — *H. purpurascens*. Formes de poils, p. 85.
Fig. 274. — *H. niger*. Cellules épidermiques des nervures principales, face externe, p. 86.

Paeonia officinalis L.

Fig. 275. — Racine traçante, tubérisée par places, portant une jeune pousse, p. 88.
Fig. 276. — Entrenœud à 5 centimètres sous l'insertion de la feuille végétative la plus complète, p. 89.
Fig. 277. — Base d'insertion de la même, p. 89.
Fig. 278. — Milieu du pétiole, p. 89.
Fig. 279. — Autre niveau dans le même pétiole, p. 89.
Fig. 280. — Sommet du même, p. 89.
Fig. 281. — Portion du faisceau M au milieu du pétiole, p. 90.
Fig. 282. — Un massif libéro-ligneux concentrique, à la base de la gaine, p. 90.
Fig. 283. — Section dans le limbe, p. 90.
Fig. 284. — Deux cellules du parenchyme spongieux, p. 90.
Fig. 285. — Épiderme interne, p. 90.
Fig. 286. — Épiderme externe, p. 90.
Fig. 287. — Une feuille périulaire supérieure (aérienne), p. 91.

Genre Paeonia.

Fig. 288. — *P. Moutan*. Milieu du pétiole, p. 92.
Fig. 289. — *Id.* Section dans le limbe, p. 92.
Fig. 290. — *Id.* Épiderme interne, p. 92.
Fig. 291. — *Id.* Épiderme externe, p. 92.

EXPLICATION DE LA PLANCHE XI.

Clematis Flammula L.

Fig. 292, 293, 294, 295 et 296. — Les premières feuilles de la pousse, p. 93.

Fig. 297, 298 et 299. — Stades successifs de la feuille végétative principale, p. 93.

Fig. 300. — La même à l'état adulte, p. 93.

Fig. 301. — Schéma du parcours dans la même, p. 94.

Fig. 302. — Milieu du pétiole, p. 94.

Fig. 303 et 304. — Deux coupes au sommet du pétiole, p. 94.

Fig. 305. — Section dans le limbe, p. 95.

Fig. 306. — Deux poils sur le pétiole, p. 95.

Genre Clematis.

Fig. 307. — *C. integrifolia.* Feuille adulte, p. 96.

Fig. 308. — *C. Vitalba.* Milieu du pétiole, p. 96.

Fig. 309. — *C. erecta.* Section base du limbe, p. 96.

Fig. 310. — *C. Stans.* Section base du limbe, p. 96.

Fig. 311. — *C. Stans.* (Schéma.) Parcours à la base du limbe, 96.

Ranunculus Lingua L.

Fig. 312. — Stade jeune de la feuille végétative aérienne, p. 99.

Fig. 313. — La même au stade de préfoliaison, p. 99.

Fig. 314. — La même adulte avec pétiole ouvert et étalé, p. 99.

Fig. 315. — Milieu du pétiole, p. 99.

Fig. 316. — Faisceau M, p. 99.

Fig. 317. — Section dans le limbe, p. 99.

Fig. 318. — Palissades vues sous l'épiderme interne, p. 100.

EXPLICATION DE LA PLANCHE XII.

Ranunculus Lingua L. (suite).

Fig. 319. — Stade jeune d'une feuille végétative nageante, p. 100.
Fig. 320. — Jeune pousse : dans le bas, les feuilles pérulaires, dans le haut, les feuilles nageantes soulevées par un long entrenœud, p. 100.
Fig. 321. — Feuille nageante en préfoliaison, p. 100.
Fig. 322. — La même adulte, p. 100.
Fig. 323. — Pétiole de la même, p. 100.
Fig. 324. — Son limbe, p. 100.

Renoncules monacrones.

Fig. 325. — *R. Flammula.* Pétiole de la feuille végétative, p. 102.
Fig. 326. — *R. amplexicaulis.* Pétiole de la feuille végétative, p. 103.
Fig. 327. — *R. gramineus.* Pétiole de la feuille végétative, p. 103.
Fig. 328. — *R. gramineus.* Section dans la moitié du limbe de la même, p. 103.

Ranunculus aquatilis L.

Fig. 329. — Une plantule en avril, p. 103.
Fig. 330. — (Schéma.) Parcours dans le pétiole et la base du limbe, p. 104.
Fig. 331. — Milieu du pétiole, p. 104.
Fig. 332. — Le faisceau M, p. 104.
Fig. 333. — Section vers le milieu d'une lanière du limbe, p. 105.
Fig. 334. — Épiderme près de l'extrémité de la même, p. 105.
Fig. 335. — La bractée nageante, p. 105.
Fig. 336. — Section dans le limbe de la même, p. 106.
Fig. 337. — Épiderme interne, p. 106.
Fig. 338. — Épiderme externe, p. 106.
Fig. 339. — *R. fluitans.* Milieu du pétiole, p. 106.

EXPLICATION DE LA PLANCHE XIII.

Ranunculus acris L.

Fig. 340. — Limbe de la feuille la plus complète, p. 108.
Fig. 341. — Limbe de la feuille la plus complète, p. 108.
Fig. 342. — Pétiole de la même, p. 108.
Fig. 343. — (Schéma.) Parcours à la base du limbe, p. 108.
Fig. 344. — Faisceau M au milieu du pétiole, p. 108.
Fig. 345. — Section dans le limbe, p. 109.
Fig. 346. — Préfeuille, p. 109.
Fig. 347. — Section à la base de la préfeuille. p. 109.

Renoncules triacrones et polacrones.

Fig. 348. — *R. repens* L. Gaine auriculo-ailée, p. 110.
Fig. 349. — *R. repens* L. Gaine auriculo-ailée, p. 110.
Fig. 350. — *R. arvensis* L. Gaine simplement ailée, p. 110.
Fig. 351. — *R. repens* L. Milieu du pétiole, p. 110.
Fig. 352. — *R. sceleratus* L. id.
Fig. 353. — *R. sardous* Crantz. id.
Fig. 354. — *R. muricatus* L. id.
Fig. 355. — *R. bulbosus* L. id
Fig. 356. — *R. arvensis* L. id.
Fig. 357. — *R. parviflorus* L. id.
Fig. 358. — *R. auricomus* L. id.
Fig. 359. — *R. nemorosus* DC. id.
Fig. 360. — *R. aconitifolius* L. id.
Fig. 361. — *R. hederaceus* L. id.
Fig. 362. — *R. lanuginosus* L. id.
Fig. 363. — *R. platanifolius* L. id.

EXPLICATION DE LA PLANCHE XIV.

Renoncules triacrones et polacrones (suite).

Fig. 364. — *R. tuberosus* Lapeyr. Milieu du pétiole, p. 110.
Fig. 365. — *R. lanuginosus* L. Milieu du pétiole, p. 110.
Fig. 366 et 367. — *R. nemorosus* DC. Limbe adulte, p. 110.
Fig. 368. — *R. muricatus* L. Limbe adulte, p. 110.
Fig. 369. — *R. auricomus* L. id.
Fig. 370. — *R. bulbosus* L. id.
Fig. 371 et 372. — *R. sardous* Crantz. Limbe adulte. p. 110.
Fig. 373. — *R. repens* L. Limbe adulte, p. 110.
Fig. 374. — *R. arvensis* L. Limbe adulte, p. 110.
Fig. 375. — *R. hederaceus* L. Feuille entière, p. 110.
Fig. 376 et 377. — *R. tuberosus* Lop. Limbe adulte, p. 110.
Fig. 378 et 379. — *R. platanifolius* L. Coupes dans le haut du pétiole et à la base du limbe, p. 112.
Fig. 380. — *R. hederaceus* L. Section dans le limbe, p. 112.
Fig. 381. — *R. arvensis* L. Section dans le limbe (spécimen des moissons, 14 mai), p. 113.
Fig. 382. — *R. arvensis* L. Section dans le limbe (spécimen d'un jardin, 21 juin), p. 113.
Fig. 383. — *R. sceleratus* L. Épiderme interne, p. 113.
Fig. 384. — *R. sceleratus* L. Épiderme externe, p. 113.
Fig. 385. — *R. repens* L. Figure demi-schématique du faisceau M, p. 112.
Fig. 386. — *R. bulbosus* L. id.
Fig. 387. — *R. auricomus* L. id.
Fig. 388. — *R. sardous* Crantz. id.
Fig. 389. — *R. arvensis* L. id.
Fig. 390. — *R. sardous* Crantz. Poil de la face externe du limbe, vu un peu obliquement, p. 114.
Fig. 391 et 392. — *R. sardous* Crantz. Deux poils dans le haut du pétiole avec piédestal, p. 114.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

INTRODUCTION 3

PREMIÈRE PARTIE.

Plan de la première partie 11

Premier groupe. — Type : *Adonis autumnalis* L. 12
Genre *Adonis* 18
Genre *Garidella* 22
Genre *Nigella* 23
Genre *Ceratocephalus* 24
Genre *Myosurus* 24

Deuxième groupe. — Type : *Anemone nemorosa* L. 26
Genre *Anemone* 36
Genre *Hepatica* 45
Genre *Eranthis* 45
Genre *Aquilegia* 46
Genre *Actaea* 49
Genre *Cimicifuga* 52
Genre *Thalictrum* 53
Genre *Isopyrum* 59

Troisième groupe. — Type : *Trollius europaeus* L. 60
Genre *Aconitum* 65
Genre *Delphinium* 69

Quatrième groupe. — Type : *Caltha palustris* L. 72
Genre *Ficaria* 77
Genre *Oxygraphis* 78

Cinquième groupe. — Type : *Helleborus fœtidus* L. 79
Genre *Helleborus* 84

Sixième groupe. — Genre *Paeonia officinalis* L. 88
Genre *Paeonia* 91

Septième groupe. — Type : *Clematis Flammula* L. 93
Genre *Clematis* 96

Huitième groupe. — Genre *Ranunculus* 98
Type I. *Ranunculus Lingua* L. 98
Type II. *Ranunculus aquatilis* L. 103
Type III. *Ranunculus acris* L. 107

Pages.

NOTES CRITIQUES :

I. La gaine 115
II. L'ochrea 115
III. La ligule 116
IV. Auricules et stipules 116
V. Le limbe 118
VI. Les rachis 118
VII. La feuille simple et la feuille composée 118
VIII. Le faisceau médian supérieur 119
IX. Mode de végétation comparé de quelques espèces 121

SECONDE PARTIE.

Plan de la seconde partie 123

I. SYNTHÈSE DES OBSERVATIONS FAITES DANS LA FAMILLE DES RENONCULACÉES 124

A. Étude de la feuille dans le temps. Organogénie 128

B. Étude de la feuille dans l'espace :

1° Étude à tous les niveaux de ce membre 129
a. Parcours des faisceaux 129
b. Histologie 133

2° Étude comparative des feuilles insérées à diverses hauteurs le long d'une même tige 138
Feuilles périulaires 138
Feuilles végétatives 139
Feuilles bractéales 139

3° Influence du milieu 140

II. ANATOMIE SYSTÉMATIQUE DES RENONCULACÉES DANS L'ÉTAT ACTUEL DE NOS CONNAISSANCES 150

CONCLUSIONS 163

LISTE ALPHABÉTIQUE DES ESPÈCES CITÉES 166

RENSEIGNEMENTS HISTORIQUES ET BIBLIOGRAPHIQUES 167

EXPLICATION DES PLANCHES 173

LES

MILIEUX HOMOGÈNES

DE

M. VIOLA

PAR

G. CESÀRO

CORRESPONDANT DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

LES

MILIEUX HOMOGÈNES

DE

M. VIOLA

Détruire est très souvent (*) plus facile que bâtir, et il est plus aisé de déchirer un livre que d'en étudier le contenu. Cette réflexion m'est suggérée par une note de M. Viola : « *La loi des indices rationnels simples et les cristaux liquides* (**) », note dans laquelle cet auteur essaye de démolir l'œuvre immortelle (*) de Haüy et de Bravais.

Je ne m'occuperai pas de la note en détail ; il me suffira, pour montrer le degré de confiance à accorder à l'auteur, de faire voir que sa démonstration finale établissant que « *La matière homogène,* » *quel que soit son arrangement, ne peut posséder que des axes* » *d'ordre* 2, 3, 4 *ou* 6 », est complètement erronée, que l'auteur se fait de la matière cristallisée une idée tellement fautive qu'en adoptant sa définition de l'*état homogène*, on parvient à démontrer que *les cristaux quadratiques et hexagonaux ne peuvent exister!* Enfin, je montrerai que, si l'expression *directions égales*, contenue dans la définition de M. Viola, signifie directions *identiques*, directions *que l'on ne peut distinguer l'une de l'autre*,

(*) Mais pas toujours.

(**) C. Viola, *La legge degli indici razionali semplici e i cristalli liquidi.* (Nota presentata dopo l'adunanza). Processi verbali della Società Toscana di Scienze naturali. Adunanza del dì 17 Marzo, 1901.

la matière homogène de M. Viola, non seulement n'existe pas, mais est *imaginaire*, c'est-à-dire qu'elle *ne peut être conçue.*

*
* *

L'auteur adopte (p. 14) la définition suivante pour les systèmes homogènes : « L'*état homogène est celui dans lequel les* » DIRECTIONS PARALLÈLES SONT PHYSIQUEMENT ÉGALES. *A cause de* » *cela,* TOUTES *les droites parallèles à un* Λ^n (axe de symétrie » de l'ordre n) *sont aussi des* Λ^n. »

*
* *

La présence des Λ^4 *et des* Λ^6 *est impossible dans les milieux homogènes de M. Viola.* En effet, imaginons un milieu possédant une série d'axes parallèles, *tous de même ordre* n. Prenons pour plan de la figure un plan perpendiculaire au faisceau et soient A, B, les traces, sur ce plan, de deux axes situés à la *plus petite* distance *a.* On sait que la composition des deux axes, par la méthode d'Euler, donne en C encore un axe de symétrie. L'axe C, *par définition,* appartient au faisceau des Λ^n et, par hypothèse, sa distance à A et B doit être plus grande ou égale à a. Or, de $b \geqslant a$, on déduit successivement :

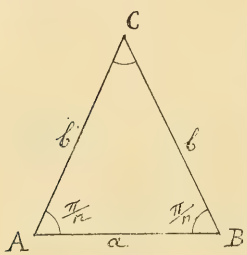


Fig. 1.

$$\hat{C} \leqslant \frac{\pi}{n}, \quad \pi - \frac{2\pi}{n} \leqslant \frac{\pi}{n}, \quad n \leqslant 3.$$

Ainsi : « *Un milieu dans lequel tous les axes parallèles seraient* » *de même ordre, ne peut posséder d'axes de symétrie d'ordre* » *supérieur à* 3 ».

Les milieux homogènes de M. Viola ne représentent donc guère les milieux cristallisés, vu que ces derniers peuvent posséder des axes d'ordre 4 ou 6.

*
* *

Mais il y a plus : Si, comme la définition de M. Viola paraît l'indiquer, les directions parallèles de ses milieux sont des axes

non seulement de même ordre, mais aussi de *même espèce*, c'est-à-dire des axes que rien ne permet de distinguer l'un de l'autre, je vais faire voir que ces milieux sont *imaginaires*, c'est-à-dire *impossibles à concevoir*.

Le paragraphe précédent ayant éliminé les axes d'un ordre supérieur à 3, il n'y a que deux cas à envisager :

a) Est-il possible de s'imaginer un milieu tel que toutes ses directions axiales parallèles soient des *axes ternaires de même espèce?*

b) Un milieu, tel que toutes ses directions axiales parallèles sont des *axes binaires de même espèce*, peut-il exister?

Premier cas. — Supposons, s'il est possible, que le milieu défini en *a*) existe. Prenons, comme ci-dessus, deux A^3 le plus rapprochés possible, A et B; composons-les par le triangle d'Euler, qui nous donne en C un nouvel axe ternaire. Si nous représentons schématiquement l'arrangement du milieu autour de A par trois points α venant s'échanger l'un avec l'autre par des rotations de 120° autour de l'axe ternaire A, l'arrangement en B et C sera parallèlement identique à celui de A. Or, il est visible que cela entraîne en S, centre du triangle ABC, l'existence d'un nouvel *axe ternaire, dont la distance à* A, B *serait plus petite que* a; ce qui est absurde, les axes A et B ayant été pris le plus rapprochés possible dans le faisceau.

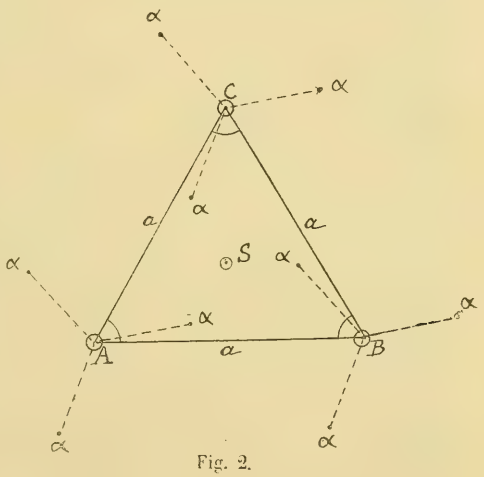


Fig. 2.

Second cas. — Considérons ensuite un faisceau axial formé de tous A^2 de même espèce; soient A et B des axes pris dans le faisceau à la plus petite distance possible. L'arrangement du

milieu étant représenté en A par l'ensemble de deux points α venant s'échanger par une rotation de 180° autour de cet axe, le même arrangement se répétera identiquement et parallèlement en B. Il est clair qu'il résulterait de là l'existence d'un nouvel axe binaire en S, point milieu de AB, ce qui est absurde. Ainsi :

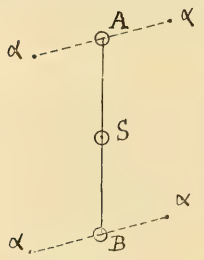


Fig. 3.

« *Il est impossible de concevoir un milieu* » *dans lequel toutes les directions axiales* » *parallèles, sont de même ordre* (*) *et de même espèce.* »

* * *

On a vu ci-dessus qu'un milieu dans lequel tous les axes parallèles seraient de même ordre, sans être de même espèce, ne peut posséder des axes d'ordre supérieur à 3. On peut se demander quelle est l'erreur qui amène M. Viola à conclure la *possibilité* des axes d'ordre 4 ou 6.

L'erreur est enfantine :

M. Viola a prouvé (**) que dans ses milieux homogènes *il ne peut exister d'autres axes que ceux d'ordre* 2, 3, 4 *ou* 6, c'est-à-dire que les *axes d'ordre* 5, 7, etc., *y sont impossibles*; mais *cela ne prouve pas que les axes d'ordre* 2, 3, 4, 6 *y soient possibles!*

Avec un peu de réflexion, après avoir éliminé les axes d'ordre 5, 7, etc., l'auteur serait parvenu à éliminer les axes quaternaires et sénaires et, dans les cas où les directions axiales parallèles sont supposées *identiques*, il serait parvenu à un milieu imaginaire; l'auteur se serait alors aperçu de l'étrangeté de l'idée qu'il se fait d'un milieu cristallisé.

* * *

Dans la définition de l'*état homogène*, il y a un mot sur lequel je crois utile de revenir : l'auteur dit que dans ses systèmes TOUTES les droites parallèles à un Λ^n sont des Λ^n. Dans tout ce qui

(*) Bien entendu : d'ordre *fini*.

(**) Je n'examinerai pas le degré d'exactitude de la démonstration.

précède, j'ai supposé que l'auteur ait voulu dire : *toutes les droites parallèles qui sont des axes* sont des axes de même ordre. Mais on pourrait se demander ce qui en adviendrait de la démonstration de M. Viola si l'on prenait le mot *toutes* à la lettre et que l'on supposait le *faisceau axial continu.* — Je vais faire voir qu'*un tel milieu ne peut admettre que des axes d'ordre infini,* et que, par conséquent, les axes d'ordre 2, 3, 4 et 6 y sont impossibles.

Je généralise la démonstration et, sans assujettir le système à être homogène, je le suppose formé d'une série indéfinie de points de différentes natures α, β, γ...

Considérons un plan P_1 normal au faisceau et contenant *un point* A *du système,* point de l'espèce α. Soit B *un point quelconque de* P_1, plan que nous prenons pour tableau ; sur la perpendiculaire menée au milieu de AB prenons un point C tel que $\widehat{ACB} = \frac{2\pi}{n}$; par hypothèse, il passe en C un Λ^n du faisceau ; donc, une rotation $\frac{2\pi}{n}$ autour de C devant restituer le système, et amenant A en B, c'est qu'en B il existait, avant la rotation, un point du système, point de l'espèce α. Ce qui a été dit pour B subsiste pour *tout* autre point du plan, c'est-à-dire que P_1 est formé de points contigus, tous de même espèce α. Pour fixer les idées, nous pouvons donc nous figurer P_1 comme une feuille homogène normale au faisceau. Considérons de même un plan P_2 contenant un point du système, de l'espèce β, et normal au faisceau ; nous démontrerions comme ci-dessus qu'en tout point de ce plan il existe un point de l'espèce β et que ce plan constitue une feuille homogène d'une matière qui peut différer de celle qui constitue le plan P_1. Et ainsi de suite. Il résulte de là que :

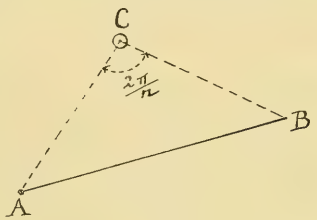


Fig. 4.

« *Un système possédant un faisceau d'axes parallèles tous de* » *même ordre, et tel qu'en tout point de l'espace il passe un axe* » *du faisceau, doit être nécessairement constitué d'un système de*

» *plans homogènes, perpendiculaires au faisceau, juxtaposés ou* » *non, la substance pouvant être la même pour tous les plans ou* » *varier d'un plan à l'autre.* »

Or, il est clair qu'une telle pile de lames, en tournant, autour d'une droite quelconque qui lui est perpendiculaire, d'un angle *infiniment petit*, prendra une position identique en apparence à la primitive, et, par conséquent, sera restituée.

Le système dont il s'agit ne peut donc admettre que des axes d'ordre infini.

*
* *

Enfin, on pourrait supposer que le milieu continu soit formé de points contigus possédant, dans le plan normal au faisceau, n polarités identiques régulièrement distribuées, c'est-à-dire que chaque point du milieu *possède un axe d'ordre* n *qui lui est propre*, sans être pour cela par définition un axe du système. Sous ce nouveau point de vue, la symétrie d'un axe passant par un point ne provient pas, comme je l'ai supposé dans ce qui précède, de l'arrangement symétrique des autres points autour de lui, mais bien de la disposition symétrique des n polarités identiques possédées par le point. Je désignerai, dans ce qui suit, par λ^n l'*axe propre au point polarisé* et qui ne doit sa symétrie qu'à la disposition des polarités du point, en conservant à Λ^n la signification ordinaire : *axe de symétrie du système*, c'est-à-dire, droite, en tournant autour de laquelle le système peut être restitué en entier, points et polarités, la plus petite rotation donnant la restitution étant $\frac{2\pi}{n}$.

Je vais faire voir que le système ainsi conçu peut admettre des axes de symétrie d'*ordre quelconque* (*).

Lemme. — *Si l'on fait tourner une figure plane* A, *possédant un* λ^n, *d'un angle* $\frac{2\pi}{n}$ *autour d'un point quelconque* C *de son plan, la nouvelle position obtenue* B *est parallèle à la première.*

(*) Si les polarités des points n'étaient pas situées dans un même plan et qu'elles se groupaient autour de plusieurs λ^n, le résultat serait différent : ainsi, en supposant que le point polarisé possède plusieurs λ^n multiples ($n > 2$), le système ne peut admettre que des axes d'ordre 2, 3, 4 ou 5.

En effet, avant d'effectuer la rotation autour de C, nous pouvons faire subir à A, autour de son λ^n, une rotation $\frac{2\pi}{n}$ de sens inverse à celle qu'elle va subir autour de C, sans que rien ne soit changé. Or, la combinaison de deux rotations égales et de sens contraires, effectuées autour de deux axes parallèles, équivaut à une translation. Donc B est parallèle à A.

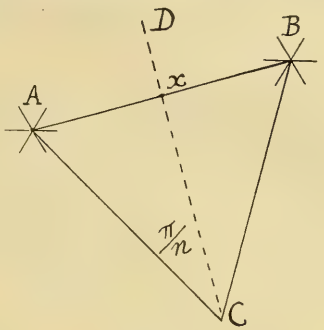


Fig. 5.

Théorème. — *Si l'on considère un système plan, continu, de points équiorientés, possédant chacun* n *polarités disposées symétriquement dans le plan autour d'un* λ^n *normal à ce dernier, le* système possède, en un point quelconque, un axe d'ordre n, *normal au plan, et cela quel que soit* n.

En effet, soit A (fig. 5) un *point polarisé quelconque* du plan considéré, C un point quelconque du plan. Joignons AC et faisons $\widehat{ACD} = \frac{\pi}{n}$, menons A$x$ perpendiculaire à CD et prenons xB = Ax. Par hypothèse, il existe en B un point polarisé orienté comme A; une rotation $\frac{2\pi}{n}$ autour de C amenant non seulement le point A en B, mais aussi, d'après le lemme, les polarités sur les polarités, le système se trouve restitué. Ainsi, il existe en un point quelconque C un axe en tournant autour duquel de $\frac{2\pi}{n}$ le système se trouve restitué, c'est-à-dire un axe d'ordre n, $2n$... kn. Mais il est clair que cet ordre est précisément n, car une rotation plus petite que $\frac{2\pi}{n}$ ne restituerait pas les polarités du point qui se trouve en C.

*
* *

On voit que, *tant que l'élément du plan est un point*, rien ne limite n; l'ordre de la symétrie peut varier depuis 2 jusqu'à ∞, ce dernier cas se rapportant au système de points non polarisés (ou également polarisés *dans le plan* suivant toutes les directions) examiné dans le paragraphe avant-précédent. Donc, si le mot *tout* est pris à la lettre, tous les ordres d'axes sont possibles dans

le système si les points sont polarisés, et, dans le cas de points non polarisés, il ne peut exister que des axes d'ordre infini.

*
* *

Une *conclusion de la plus grande importance* se dégage de ce qui précède : *Tant que l'on n'attribue pas à l'élément du plan cristallin une forme symétrique propre, on n'arrive pas à exclure du système les axes de symétrie qui sont exclus dans les cristaux.* Le fait que la matière cristallisée ne nous montre que des axes d'ordre 2, 3, 4 ou 6 constitue donc un argument puissant en faveur de la théorie de la structure.

CALCUL DU VOLUME

D'UNE

FORME CRISTALLINE QUELCONQUE

PAR

G. CESÀRO

CORRESPONDANT DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

CALCUL DU VOLUME

D'UNE

FORME CRISTALLINE QUELCONQUE

La méthode que nous allons exposer permet de déterminer le volume d'une forme quelconque, holoédrique ou hémiédrique, appartenant à n'importe quel système cristallin. Il s'agit, naturellement, non des combinaisons de formes simples, dont le volume varie avec le développement relatif de celles-ci, mais bien des formes dont toutes les faces ont même notation générale, déterminée par la notation *hkl* d'une de ces faces. Les systèmes clinorhombique et clinoédrique ne devront donc pas être pris en considération, vu que, dans le premier, la forme *hkl* est tout au plus un prisme indéfini à quatre faces et que, dans le second, toute forme simple se compose de deux plans parallèles. On doit aussi exclure les prismes (*) et les solides appartenant aux groupes pyramidaux : formes non centrées, ne possédant qu'un A^n par lequel passent n plans de symétrie.

Les solides à envisager *posséderont donc au moins un axe de symétrie,* qui sera toujours combiné soit avec le centre, soit avec un ou plusieurs plans de symétrie.

Voici la propriété générale, très simple, qui permet de calculer le volume d'une *forme cristalline quelconque :*

Théorème I. — *Le volume d'une forme cristalline quelconque égale le tiers du produit obtenu en multipliant le nombre de ses*

(*) Sauf le cube et le rhomboèdre.

faces par la projection d'une quelconque de ses faces sur un plan normal à un axe de symétrie et par le segment que la face considérée intercepte sur cet axe.

Prenons l'axe de symétrie pour axe des z et soit s_l l'aire de la projection de la face *hkl* sur un plan, normal à z, passant par le centre de gravité (*) du solide.

Observons que toutes les faces de la forme cristalline sont égales entre elles, vu qu'elles proviennent de la répétition de la face *hkl*, soit par rapport aux axes ou plans de symétrie, soit par rapport au centre, et que, par la même raison, les perpendiculaires menées du centre de gravité sur les différentes faces ont même longueur p.

Si donc on joint le centre de gravité aux différents sommets du solide, celui-ci se trouvera partagé en n pyramides équivalentes, si n est le nombre de faces de la forme considérée. En désignant par s l'aire d'une face, on a donc, pour le volume de la forme,

$$V = \frac{1}{3} nsp.$$

Mais si φ est l'angle que la face *hkl* fait avec le plan de projection, on a

$$s_l = s \cos \varphi$$

et

$$p = \frac{c}{l} \cos \varphi,$$

$\frac{c}{l}$ étant le segment que la face considérée coupe sur l'axe des z. On en déduit

$$sp = s_l \cdot \frac{c}{l} \qquad (\alpha)$$

et

$$V = \frac{1}{3} n \,.\, s_l \,.\, \frac{c}{l}, \qquad (1)$$

égalité qui démontre la propriété énoncée ci-dessus.

(*) Centre dans les polyèdres centrés; point d'intersection des axes et plans de symétrie dans les autres.

Théorème II. — *Si une forme cristalline possède un axe de symétrie tel que toutes ses faces le coupent à une même distance du centre de gravité, le solide est le tiers du prisme droit circonscrit dont la surface latérale le projette sur un plan normal à l'axe considéré.*

En effet, si $\frac{c}{l}$ est constant, φ et s_l le sont aussi. En outre, la projection de l'ensemble des faces coupant l'axe vers le haut coïncide avec celle de l'ensemble des faces qui convergent vers le bas, car le plan de projection est un plan de symétrie ou bien contient des axes d'ordre pair (*). Il s'ensuit que ns_l représente le double de la projection de la surface du polyèdre sur le plan normal à l'axe, c'est-à-dire le double de la base B du prisme projetant circonscrit; et comme $\frac{c}{l}$ est la moitié de la hauteur H de ce prisme, il vient

$$V = \frac{1}{3}BH. \qquad (2)$$

Observation. — Sauf dans le système cubique, il est toujours possible de trouver un axe de symétrie par rapport auquel toutes les faces ont même caractéristique : dans les systèmes quadratique, hexagonal et rhomboédrique, c'est l'axe multiple ou le Λ^2 qui le remplace dans le groupe sphénoédrique, de sorte que

Tout solide, holoédrique ou hémiédrique, d'un système uniaxe, vaut le tiers du prisme circonscrit dont la surface latérale le projette sur un plan normal à l'axe unique de son espèce.

Quant aux solides de l'orthorhombrique, rhomboctaèdre et sphénoïde, les trois axes binaires répondent à la question.

On voit que ce théorème donne, sans aucun calcul, le volume de la forme cristalline, si sa projection est un polygone simple, c'est-à-dire le volume des octaèdres, sphénoèdres, dihexaèdres, rhomboèdres, scalénoèdres, sphénoïdes, etc. Dans le cas des groupes holoaxes, tout revient au calcul de l'aire de la projection. Or, les notations des faces donnant les coordonnées de leur

(*) Le groupe Λ^3,C paraît faire exception; cependant, comme la forme la plus générale est un rhomboèdre, celui-ci possède *géométriquement* des axes binaires dans le plan de projection.

point d'intersection et deux de celles-ci étant les coordonnées d'un sommet de la projection, le problème est ramené, en général, au calcul de la surface d'un polygone plan donné par les coordonnées de ses sommets.

Emploi, dans le système cubique, de l'aire B *de la projection.* — Le théorème II n'est pas directement applicable aux formes du système cubique : en projetant le solide sur un Λ^4, ou sur un Λ^2 qui remplace ce dernier dans les groupes hémiédriques non holoaxes, on aura, sur la projection, trois catégories de faces coupant respectivement $\frac{a}{h}$, $\frac{a}{k}$, $\frac{a}{l}$ sur l'axe considéré; dans chaque catégorie, il y aura le même nombre de faces, et il est facile de s'assurer que ce nombre, quel que soit le groupe, est $\frac{n}{6}$. De sorte que

$$\frac{n}{6}(s_h + s_k + s_l) = \mathrm{B}.$$

En outre, à cause de (α),

$$\frac{s_h}{h} = \frac{s_k}{k} = \frac{s_l}{l} = \frac{6\mathrm{B}}{n(h + k + l)}.$$

La formule (1) devient

$$\mathrm{V} = \frac{2a}{h + k + l}\mathrm{B}. \qquad (3)$$

Système cubique.

Nous supposons, dans les notations, $h > k > l$.

Groupe holoédrique. — La figure 1 montre la projection sur xy du dodécatétraèdre hkl (*).

Première méthode. — Appliquons la formule (1), en nous servant de la projection de la face lkh. Les coordonnées du point O, qui est sur l'axe ternaire, sont

$$x_2 = y_2 = z_2 = \frac{a}{h + k + l};$$

(*) Les coordonnées x, y des points projetés servent en même temps pour le tracé de la projection. Toutes nos épures se rapportent à $hkl = 321$, sauf les figures 1 et 2, qui représentent les projections de $hkl = 543$.

pour le point A, intersection des faces *lkh*, *lhk*, *yz*, on a

$$y_1 = \frac{a}{h+k};$$

de sorte que

$$\text{ZAO} = s_h^{\text{v}} = \frac{1}{2} y_1 x_2 = \frac{a^2}{2(h+k)(h+k+l)}.$$

Or

$$\text{V} = 16\, s_h \cdot \frac{a}{h};$$

donc

$$\text{V} = \frac{8a^3}{h(h+k)(h+k+l)}.$$

Seconde méthode. — Appliquons la formule (3). On a

$$\text{B} = 8\,.\,\text{ZDS} = 4\,\frac{a}{h}\,x_3,$$

en désignant par x_3, y_3 les coordonnées du point D ; or, ce point est à la fois sur la bissectrice de xy et sur la trace

$$hx + ky = a$$

de la face *hkl* sur le plan des xy, de sorte que

$$x_3 = y_3 = \frac{a}{h+k}.$$

Donc

$$\text{B} = \frac{4a^2}{h(h+k)}$$

et

$$\text{V} = \frac{8a^3}{h(h+k)(h+k+l)}.$$

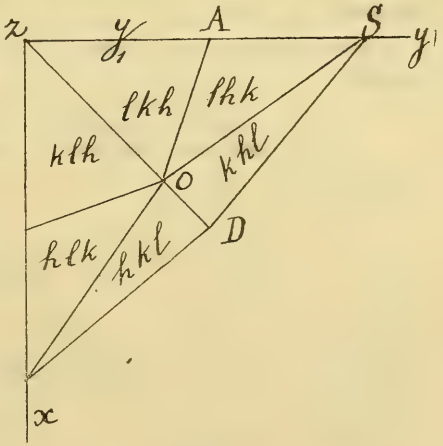


Fig. 1.

Cette formule exprime une propriété intéressante : Dans un dodécatétraèdre, il y a des sommets S situés sur les axes quaternaires, des sommets O placés sur les axes ternaires et des som-

mets D où aboutissent les axes binaires; supposons que par les sommets de même espèce nous menions des plans parallèles aux faces du cube; nous obtiendrons trois cubes ayant respectivement pour arêtes

$$a_1 = 2\frac{a}{h},$$

$$a_3 = 2\frac{a}{h+k+l},$$

$$a_2 = 2\frac{a}{h+k};$$

par conséquent

$$V = a_2 a_3 a_4.$$

De sorte que le volume du dodécatétraèdre est la moyenne géométrique des volumes des trois cubes construits comme ci-dessus, ou bien *le dodécatétraèdre est équivalent à un parallélipipède rectangle ayant pour dimensions les distances qui séparent deux sommets de même espèce sur une droite parallèle à un axe quaternaire.*

Cas particuliers. — On désigne par v le volume $8a^3$ du cube primitif.

	Octaèdre.	Hexa-tétraèdres.	Rhombo-dodécaèdre.	Trapézoèdres.	Octotrièdres.
$hkl =$	111	$m10$	110	$m11$	$mm1$
$V =$	$\frac{v}{6}$	$\frac{v}{m(m+1)^2}$	$\frac{v}{4}$	$\frac{v}{m(m+1)(m+2)}$	$\frac{v}{2m^2(2m+1)}$.

Ces formules donnent le volume de la forme *hkl*. Si l'on déplaçait les faces de cette forme parallèlement à elles-mêmes, de manière que les dimensions linéaires étaient multipliées par un certain coefficient C, le volume sera multiplié par C^3; ainsi, dans le cas où l'on suppose que les faces modifiantes s'avancent jusqu'à ce que les sommets situés sur les axes quaternaires viennent coïncider avec les centres des faces du cube, le segment $\frac{a}{h}$ devenant a, le volume sera multiplié par h^3.

Groupe tétraédrique. — Appliquons la formule (1), en nous servant de la face *lkh* (fig. 2). En désignant par y_1 et y_2 les

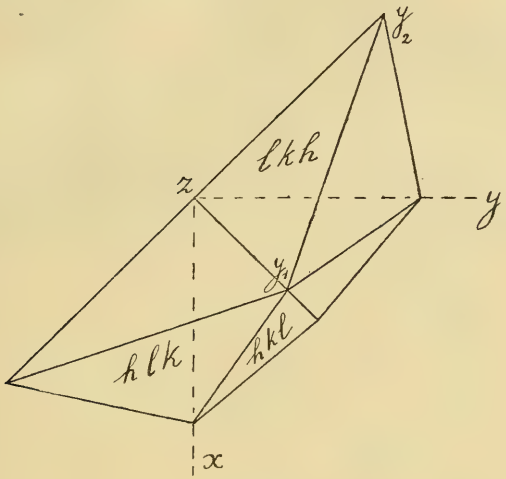


Fig. 2.

ordonnées des deux sommets de cette face situés sur les axes ternaires, on a

$$s_h = \frac{1}{2} \cdot y_1\sqrt{2} \cdot y_2\sqrt{2} = y_1 y_2.$$

Or

$$y_1 = \frac{a}{h+k+l}, \qquad y_2 = \frac{a}{h+k-l}.$$

Donc

$$s_h = \frac{a^2}{(h+k)^2 - l^2}$$

et

$$V = \frac{8a^3}{h\{(h+k)^2 - l^2\}}.$$

C'est là le volume du tétrahexaèdre *hkl*.

Cas particuliers. — Pour les hexatétraèdres et le rhombodo-

décaèdre, on retrouve les formules obtenues dans le groupe holoédrique.

	Tétraèdre.	Tétradrièdres.	Trapézododécaèdres.
$hkl =$	111	$m11$	$mm1$
$V =$	$\frac{v}{5}$	$\frac{v}{m^2(m+2)}$	$\frac{v}{m(4m^2-1)}$.

Groupe hexadiédrique. — La figure 3 représente la projection sur yz du dodécadièdre hkl. Pour calculer le volume, employons

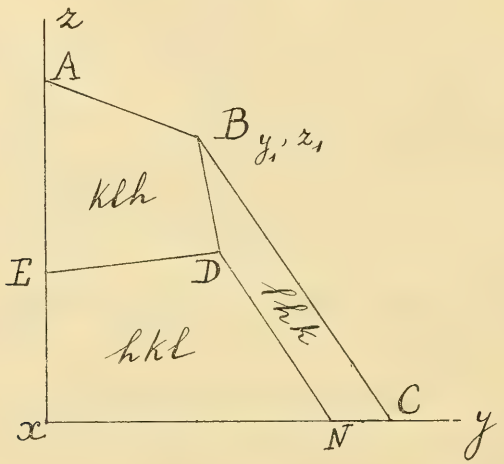


Fig. 3.

la formule (3). En désignant par y_1, z_1 les coordonnées du point B, on a pour l'aire de la projection

$$B = 4 \,.\, ABCx = 2\,\frac{a}{h}(y_1 + z_1).$$

Les équations des droites AB, BC étant respectivement

$$ly + hz = a, \qquad hy + kz = a,$$

on en déduit

$$y_1 = \frac{h-k}{h^2-kl}\,a, \qquad z_1 = \frac{h-l}{h^2-kl}\,a;$$

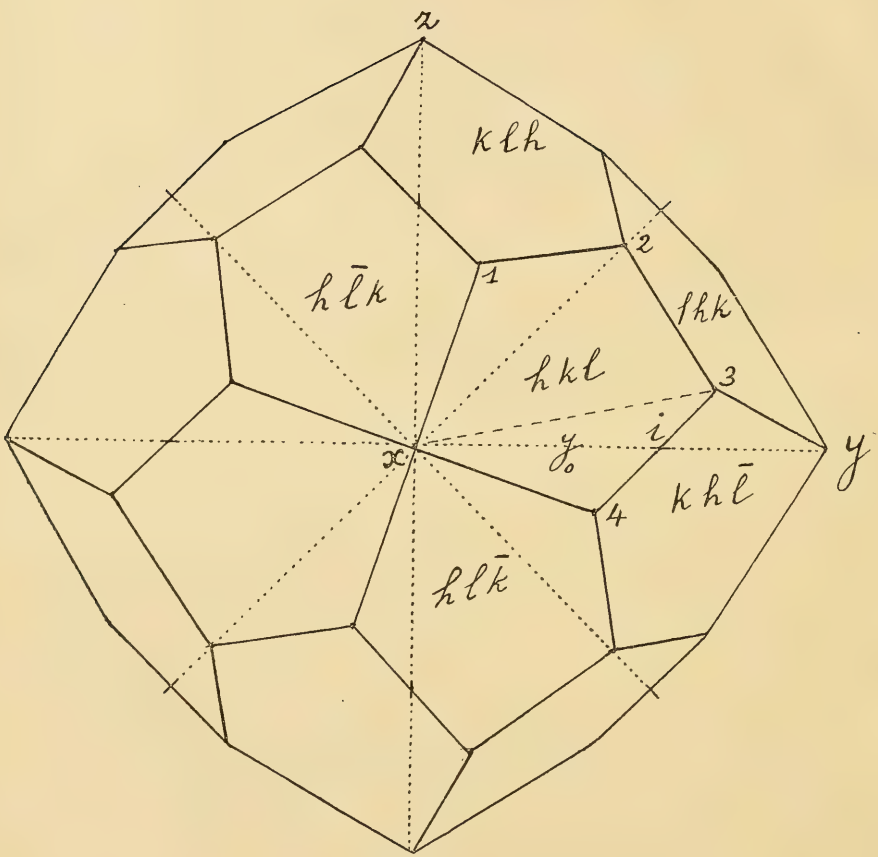


Fig. 4.

par conséquent,

$$B = \frac{2a^2}{h} \cdot \frac{2h - k - l}{h^2 - kl},$$

et

$$V = \frac{4a^3(2h - k - l)}{h(h + k + l)(h^2 - kl)}.$$

Cas particuliers. — On retrouve les mêmes formules que dans le groupe holoédrique pour les trapézoèdres $m11$ et les octotrièdres $mm1$ (*).

Pour l'hexadièdre $m10$, la formule devient

$$V = v \cdot \frac{2m - 1}{2m^3(m + 1)}. \text{ (**)}$$

Groupe holoaxe. — La figure 4 représente la projection sur yz du solide hkl de ce groupe. Pour calculer son volume, nous appliquerons la formule (1), en nous servant de la projection de la face hkl, qui est le pentagone $x1234$, dont nous allons calculer la surface. Soient (y_1, z_1) les coordonnées du point 1, (y_2, y_2) celles du point 2; les coordonnées du point 4 s'obtiennent en observant que ce point est la position que prend 1 par une rotation de 90° autour de x; donc

$$y_4 = z_1, \qquad z_4 = -y_1;$$

comme en i aboutit un axe binaire, ce point est le milieu de 34, de sorte qu'en posant $xi = y_0$, on aura pour les coordonnées du point 3,

$$y_3 = 2y_0 - z_1, \qquad z_3 = y_1.$$

En traçant les diagonales $x2$, $x3$ et en désignant par s_1, s_2, s_3 respectivement les aires des triangles $x12$, $x23$, $x3i$, on a

$$s_h = s_1 + s_2 + 2s_3.$$

(*) Pour l'octaèdre 111, la valeur de V devient indéterminée, mais on évite l'indétermination en faisant d'abord $k = l$.

(**) Pour le pyritoèdre 210, on obtient $V = \frac{1}{16} v$, c'est-à-dire *la moitié du cube circonscrit*.

Or (*)

$$2s_1 = y_2(x_1 - y_1)$$
$$2s_2 = y_2(y_3 - z_3) = y_2(2y_0 - z_1 - y_1)$$
$$2s_3 = y_0 y_1;$$

donc

$$s_h = y_0 y_2 + y_1(y_0 - y_2),$$

et comme

$$y_0 = \frac{a}{h+k}, \quad y_2 = \frac{a}{h+k+l}; \quad s_h = \frac{a(a+ly_1)}{(h+k)(h+k+l)}.$$

Il reste à chercher y_1 : en écrivant que le point 1 se trouve dans les plans hkl, $h\bar{l}k$, klh, on obtient

$$y_1 = \frac{a(h-k)(k-l)}{(h+k)(hk-k^2+hl-l^2)},$$

puis

$$s_h = \frac{a^2}{(h+k)^2(h+k+l)} \cdot \frac{(h^2-k^2)(k+l)+2hl(k-l)}{k(h-k)+l(h-l)},$$

et

$$V = \frac{8a^3}{h(h+k)^2(h+k+l)} \cdot \frac{(h^2-k^2)(k+l)+2hl(k-l)}{k(h-k)+l(h-l)}.$$

Cas particuliers. — Cette formule donne naturellement les mêmes résultats que dans le groupe holoédrique pour $m10$, $m11$ et $mm1$.

Groupe tétartoédrique : $3\Lambda^2$, $4(\lambda\lambda')^3$. — La figure 5 représente, en projection sur xy, la forme hkl de ce groupe. Nous emploierons la formule (3) et calculerons l'aire B de la projection en retranchant du carré ZENA les triangles BCN et CDN. Si l'on désigne par $\bar{x}_1$, y_1, z_1 les coordonnées du point P, celles des points L et D qui lui correspondent par rapport à l'axe ternaire T, sont respectivement z_1, $\bar{x}_1$, y_1

(*) L'aire d'un triangle ayant un sommet à l'origine et dont les autres sommets ont pour coordonnées (y_1, z_1) et (y_2, z_2), est donnée par $2s = z_1 y_2 - y_1 z_2$.

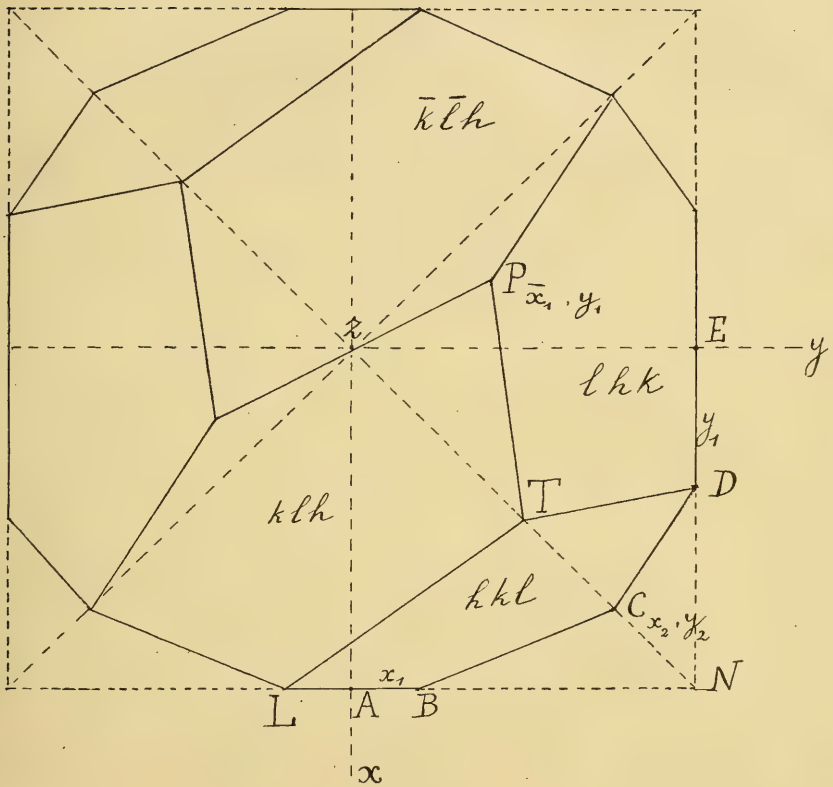


Fig. 5.

et y_1, z_1, x_1; de sorte que $AB = x_1$ et $DE = y_1$. Pour le point C, on a

$$x_2 = y_2 = \frac{a}{h + k - l}.$$

$$BCDN = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{h} - x_1\right)\left(\frac{a}{h} - x_2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{h} - y_1\right)\left(\frac{a}{h} - x_2\right)$$

$$\frac{1}{2}B = \frac{2a^2}{h^2} - \left(\frac{a}{h} - x_2\right)\left(\frac{2a}{h} - x_1 - y_1\right) = \frac{2a}{h}x_2 + (x_1 + y_1)\left(\frac{a}{h} - x_2\right).$$

En écrivant que P est l'intersection des plans klh, $\bar{k}\bar{l}h$ et lhk, on obtient

$$x_1 = a\frac{l(h-k)}{h(hk - l^2)}, \qquad y_1 = a\frac{k(h-k)}{h(hk - l^2)},$$

puis

$$\frac{1}{2}B = \frac{a^2}{h^2(h + k - l)(hk - l^2)}\{2h(hk - l^2) + (h - k)(k^2 - l^2)\}$$

et

$$V = \frac{4a^3}{h^2(hk - l^2)(h + k + l)(h + k - l)}\{2h(hk - l^2) + (h - k)(k^2 - l^2)\}.$$

Cas particuliers. — On sait que ce groupe peut présenter, en même temps que les hexadièdres, les tétratrièdres et les trapézododécaèdres; c'est ce que l'on peut vérifier en remplaçant, dans la formule ci-dessus, hkl successivement par $m10$, $m11$ et $mm1$.

Système quadratique.

Nous supposons dans les notations $h \geqq k$.

Groupe sphénoédrique. — Le volume du disphénoèdre hkl s'obtient immédiatement par le théorème II : c'est le tiers du prisme circonscrit ayant pour base un carré de côté $\frac{2a}{h}$ et pour hauteur $\frac{2c}{l}$:

$$V = \frac{8a^2c}{3h^2l}.$$

Groupe holoaxe. — La figure 6 représente la projection, sur un plan normal au A^4, du trapézoèdre tétragonal *hkl*. Comme le solide doit se restituer par une rotation de 180° autour d'un des axes binaires, les arêtes culminantes inférieures sont égales aux

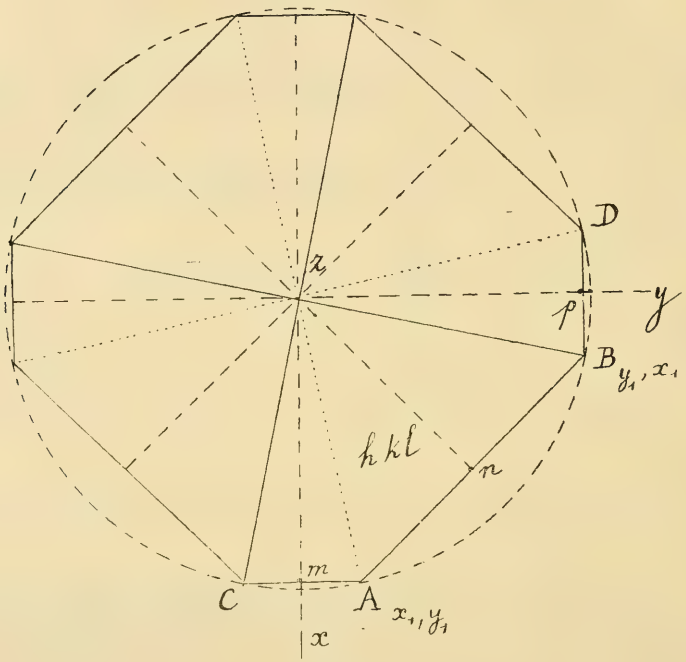


Fig. 6.

supérieures et également inclinées sur le A^4; il s'ensuit que tous les sommets latéraux C, A, B, D,... se projettent sur une même circonférence ayant *z* pour centre. Pour le calcul du volume, appliquons la formule (1) en nous servant de la face *hkl* projetée en CAB*z*. Si x_1, y_1 sont les coordonnées de A, celles de B seront y_1, x_1, de sorte que

$$2s_1 = 2x_1y_1 + x_1^2 - y_1^2.$$

Comme $x_1 = \frac{a}{h}$, pour avoir y_1, il suffit d'écrire que le point A se trouve sur *hkl* et sur le plan *z*ABD qui coupe l'axe des *z* vers

le bas; la trace de ce dernier plan sur le tableau étant *np*, sa notation est $kh\bar{l}$; on en déduit $y_1 = a\frac{h-k}{h(h+k)}$. Par conséquent,

$$s_l = \frac{a^2(h^2 - k^2 + 2hk)}{h^2(h+k)^2} \qquad \text{et} \qquad V = \frac{8a^2c}{3l} \cdot \frac{h^2 - k^2 + 2hk}{h^2(h+k)^2}.$$

Système rhomboédrique.

Nous désignons par h la plus grande caractéristique relative aux axes binaires et par k la moyenne, abstraction faite des signes; pour la troisième caractéristique $h - k$, on a donc

$$h - k \leqq k, \qquad \text{ou} \qquad h \leqq 2k.$$

Dans la notation hkl de la face qui détermine la forme, nous supposons donc

$$k \leqq h \leqq 2k.$$

Groupe holoédrique. — Le volume d'un scalénoèdre *hkl*, isoscéloèdre ou rhomboèdre, s'obtient immédiatement par le théorème II : c'est le tiers du prisme droit ayant pour base l'hexagone régulier d'apothème $\frac{a}{h}$ et pour hauteur $\frac{2c}{l}$:

$$V = \frac{4a^2c}{h^2l\sqrt{3}}.$$

Groupe holoaxe. — La figure 7 représente la projection du trapézoèdre trigonal *hkl* sur un plan normal à l'axe ternaire. Pour calculer son volume, nous employons la formule (1) et calculons l'aire A*z*CB de la projection de la face *hkl*. On a

$$s_l = \frac{a}{k}x_1 \sin 60° + \frac{a}{h}y_1 \sin 60° = a \sin 60° \left(\frac{x_1}{k} + \frac{y_1}{h}\right).$$

Pour avoir x_1 et y_1, on écrira que le point B se trouve sur *hkl* et sur les faces BCI, BAD qui coupent l'axe des z vers le bas; la face BCI, dont la trace sur le plan de projection est *np*, a pour

notation $h.h - k.\overline{l}$; BAD, dont la trace est mq, a pour notation $\overline{h-k}\,.\,k\,.\,\overline{l}$. On obtient

$$x_1 = 2a\,\frac{2k-h}{3hk}, \qquad y_1 = 2a\,\frac{2h-k}{3hk},$$

puis

$$s_1 = \frac{2a^2 \sin 60^\circ}{3h^2k^2}(4hk - h^2 - k^2) \quad \text{et} \quad V = \frac{2^2ac}{h^2k^2l\sqrt{3}}(4hk - h^2 - k^2).$$

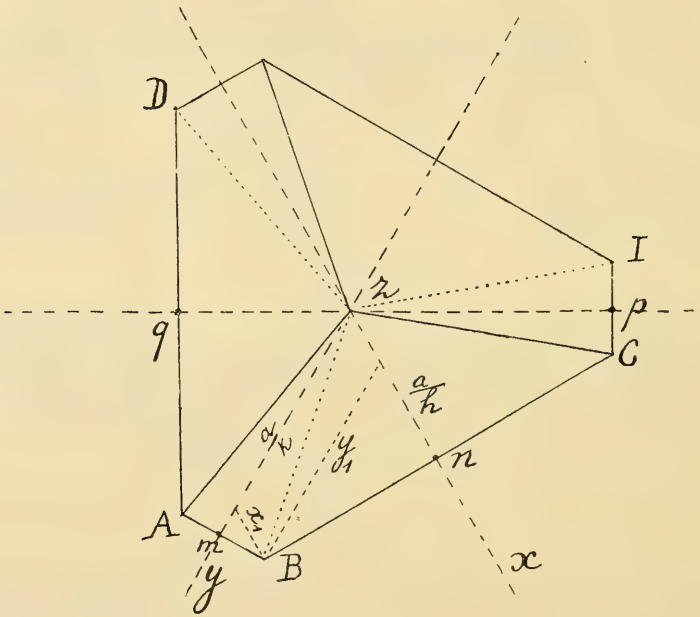


Fig. 7.

Cas particuliers. — Pour hhl, on retrouve la formule donnant le volume du rhomboèdre dans le groupe holoédrique. Pour le ditrièdre, $k = \frac{h}{2}$ et

$$V = \frac{6a^2c}{h^2l\sqrt{3}}.$$

En comparant ce volume à celui de l'isoscéloèdre de même notation, on voit qu'ils sont entre eux comme 3 est à 2, ce qui

doit être, car la base du ditrièdre est le triangle équilatéral obtenu en prolongeant trois côtés non adjacents de l'hexagone régulier qui sert de base à l'isoscéloèdre.

Système orthorhombique.

Groupe sphénoïdique : L^2, L'^2, L''^2. — Le volume du sphénoïde *hkl* est donné immédiatement par le théorème II : le sphénoïde *hkl* est le tiers du parallélipipède rectangle ayant pour dimensions $\frac{2a}{h}$, $\frac{2b}{k}$, $\frac{2c}{l}$:

$$V = \frac{8abc}{3hkl}.$$

Vérifications.

En appliquant la méthode exposée ci-dessus aux projections d'une forme cristalline sur des plans normaux à ses différents axes de symétrie, on obtient des vérifications et des relations entre les aires de ces projections. Voici deux exemples dans lesquels le solide a été projeté parallèlement à un axe binaire.

Trapézoèdre tétragonal. — La figure 8 représente la forme *hkl* du groupe quadratique holoaxe projetée sur un plan normal à l'axe binaire *x*. La projection se compose de deux fois le triangle ESD et du rectangle EDGC; si l'on désigne par z_1 le z du point A, on a, pour l'aire de cette projection,

$$B = \frac{2a}{h}\left(\frac{c}{l} + z_1\right).$$

A l'aide des notations (*) des plans contenant A, on obtient

$$z_1 = \frac{kc}{hl} \cdot \frac{h-k}{h+k} \quad \text{et} \quad B = \frac{2ac}{h^2 l} \cdot \frac{h^2 - k^2 + 2hk}{h+k}.$$

(*) Ces notations sont inscrites sur la figure.

Comme

$$\frac{s_h}{h} = \frac{s_k}{k} = \frac{B}{2(h+k)},$$

la formule (1) donne

$$V = \frac{4aB}{3(h+k)} = \frac{8a^2c(h^2 - k^2 + 2hk)}{3h^2l(h+k)^2}.$$

Ce résultat avait été obtenu, page 15, par l'emploi de la projection sur un plan normal à l'axe quaternaire.

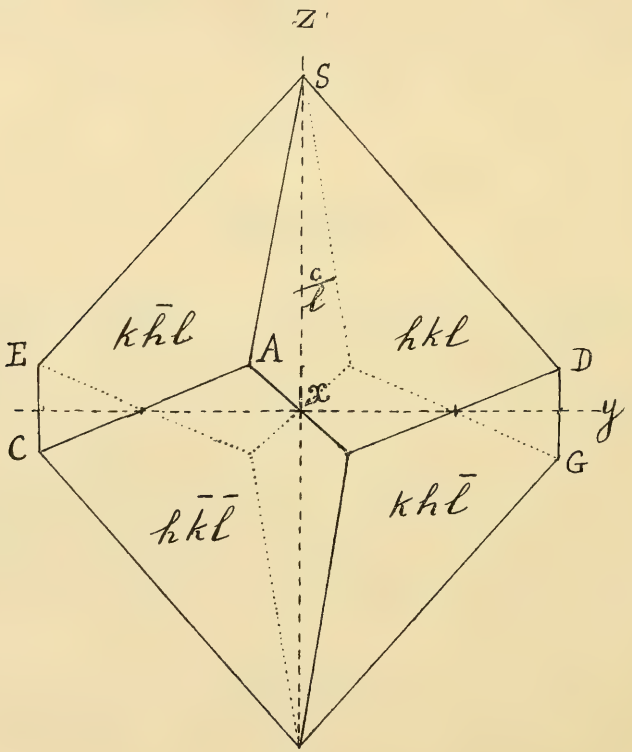


Fig. 8.

Scalénoèdre. — La figure 9 représente la projection de la forme *hkl* sur un plan normal à l'axe binaire *x*. Des six faces projetées, deux coupent sur *x* un segment $\frac{a}{h}$, tandis que les

autres, deux par deux, interceptent sur le même axe des segments $\frac{a}{k}$ et $\frac{a}{h-k}$; on a donc

$$\frac{s_h}{h} = \frac{s_k}{k} = \frac{s_{h-k}}{h-k} = \frac{B}{4h}.$$

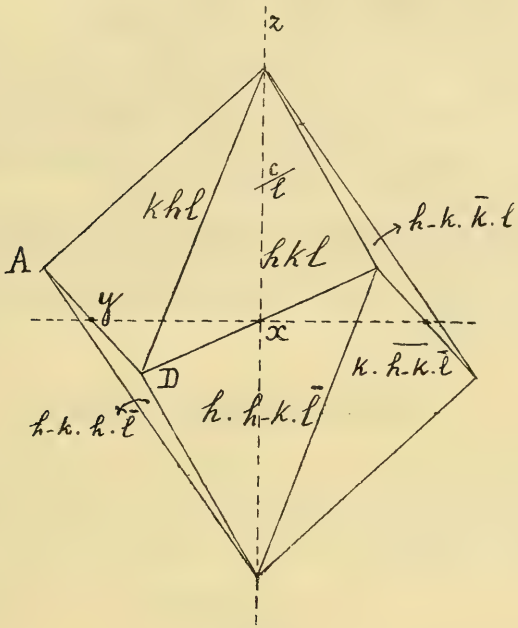


Fig. 9.

La formule (1) donne

$$V = B \times \frac{a}{h}. \qquad (4)$$

En désignant par u la distance à l'axe des z du point A $(x_1 y_1 z_1)$, point situé dans le plan de projection, on a

$$B = \frac{2c}{l} u, \qquad u = y_1 \cos 30°.$$

Pour avoir y_1, le plus simple est d'écrire que A se trouve sur le tableau et sur le plan touchant le scalénoèdre suivant son

arête latérale AD; ces plans ont respectivement pour équation

$$2x + y = 0, \qquad x + 2y = \frac{2a}{h}.$$

On en déduit successivement

$$B = \frac{4ac}{hl\sqrt{3}}, \qquad V = \frac{4a^2c}{h^2l\sqrt{3}}.$$

Remarque. — La formule (4) exprime une propriété intéressante : B étant la section faite dans le scalénoèdre par un de ses plans de symétrie, $\frac{2a}{h}$ la dimension du solide estimée suivant l'axe binaire normal à ce plan, on voit que

Tout solide du groupe rhomboédrique holoédrique est la moitié du parallélipipède droit circonscrit dont les faces latérales le touchent suivant la section parallélogrammique qu'y détermine un plan de symétrie.

Surface d'une forme cristalline.

En désignant par x, y, z les angles que la normale à la face *hkl* fait avec les axes coordonnés, on a vu qu'entre le volume et la surface de la forme cristalline se passe la relation

$$V = \frac{S}{3} \cdot \frac{c}{l} \cos z.$$

Le volume ayant été déterminé dans les pages précédentes, cette formule donnera S lorsque z sera connu. A cet effet, on cherchera d'abord la relation entre x, y, z et l'angle $xoy = \omega$ (fig. 10); on a

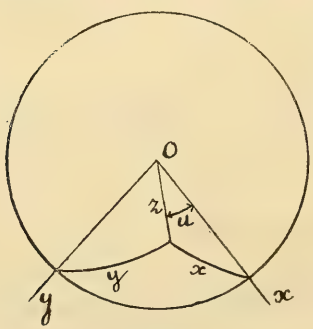


Fig. 10.

$$\cos x = \sin z \cos u,$$
$$\cos y = \sin z \cos (\omega - u)$$

et, en éliminant u,

$$\cos^2 x + \cos^2 y - 2 \cos x \cos y \cos \omega = \sin^2 \omega \sin^2 z. \qquad (5)$$

En tirant ensuite x et y en fonction de z des relations

$$\frac{a}{h}\cos x = \frac{b}{k}\cos y = \frac{c}{l}\cos z$$

et en les remplaçant dans (5), on obtient

$$\frac{1}{\cos z} = \sqrt{1 + \frac{c^2}{l^2 \sin^2 \omega}\left(\frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} - \frac{2hk}{ab}\cos \omega\right)},$$

puis

$$S = 3V\sqrt{\frac{l^2}{c^2} + \frac{1}{\sin^2 \omega}\left(\frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} - \frac{2hk}{ab}\cos \omega\right)}.$$

Dans le système orthorhombique, on fera $\omega = 90°$, dans le rhomboédrique et l'hexagonal, $a = b$, $\omega = 60°$, etc.

APPENDICE.

En parcourant la démonstration du théorème I, on voit que le volume d'un polyèdre quelconque peut être obtenu par la formule

$$V = \frac{1}{3}\Sigma sz,$$

formule dans laquelle s est la projection sur un plan quelconque xy d'une face coupant un segment z sur l'axe normal à xy, la sommation se rapportant à toutes les faces du polyèdre et en observant que si pour une face $s = 0$, z devient infini et le produit indéterminé sz doit être calculé directement.

Cette méthode est d'une application remarquablement facile lorsqu'il s'agit de calculer le volume d'un solide composé de plusieurs formes simples. Comme nous l'avons dit, tandis que la loi de symétrie permet de définir le volume d'une forme simple, il n'existe pas de loi réglant le développement relatif des formes qui entrent dans la composition d'un cristal. Ce n'est que simplement comme application de notre méthode générale que nous donnons les cas qui suivent.

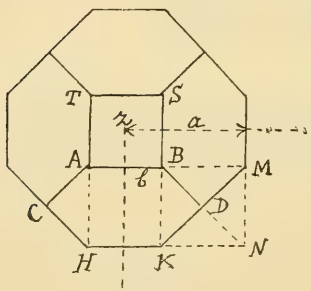


Fig. 11.

Problème I. — *Un plan, d'abord tangent à l'arête du cube, s'enfonce progressivement dans celui-ci en marchant parallèlement à lui-même. Chercher la variation du volume ainsi engendré et celle des parties appartenant respectivement au cube et au rhombododécaèdre.*

Donnons-nous le développement respectif des deux formes par le côté $2a$ du cube primitif et le côté $2b$ du carré variable ABST (fig. 11). Pour la face supérieure du cube, on a

$$z = a, \qquad s_c = 4b^2$$

et, comme il y a six faces,

$$V_c = 8ab^2 = vx^2,$$

en posant $\frac{b}{a} = x$ et en désignant par v le volume du cube primitif. La face du rhombododécaèdre, dont la trace sur la face supérieure du cube est AB, coupe sur z, à partir de cette face, un segment b; de sorte que $z = a + b$; quant à l'aire de la face projetée ABDKHC, on a

$$s_r = \text{ABKH} + 2 \cdot \text{BDK} = \text{ABKH} + \frac{1}{2}\,\text{BMNK}$$

$$= 2b(a - b) + \frac{1}{2}(a - b)^2 = \frac{1}{2}(a - b)(a + 3b),$$

de sorte que

$$V_r = 2(a^2 - b^2)(a + 3b) = \frac{v}{4}(1 - x^2)(1 + 3x).$$

Enfin, le volume du cubo-rhombododécaèdre, qui est la somme des deux précédents, est donné par

$$V = 2(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 - 2b^3)$$

ou

$$V = \frac{v}{4}(1 + 3x + 3x^2 - 3x^3).$$

La figure 12 montre la variation des trois volumes lorsque x décroît de 1 à 0 :

Le volume V_c appartenant au cube décroît de v à 0.

Le volume V_r appartenant au rhombododécaèdre croît d'abord de 0 à un maximum de $\frac{4v}{243}(10 + 7\sqrt{7}) = 0{,}47v$, qu'il atteint pour $x = \frac{1}{9}(\sqrt{28} - 1) = 0{,}48$, puis décroît jusqu'à $\frac{v}{4}$. La tangente au point $x = 1$ coupe un segment $2v$ sur l'axe des V; la tangente au point $x = 0$ coupe sur l'axe des x un segment $-\frac{1}{3}$.

Le volume résultant V décroît d'abord lentement jusqu'à $\frac{5v}{9}$, valeur qu'il atteint par $x = \frac{1}{3}$; en ce point, il y a inflexion ; puis le volume décroît plus rapidement jusqu'à $\frac{v}{4}$.

Pour $x = 0$, les courbes en V_r et en V ont même tangente. Les courbes en V_e et en V_r se coupent en un point donné par

$$0{,}651 < x < 0{,}652;$$

en ce point, les volumes composants ont pour valeur approximative commune $0{,}43v$.

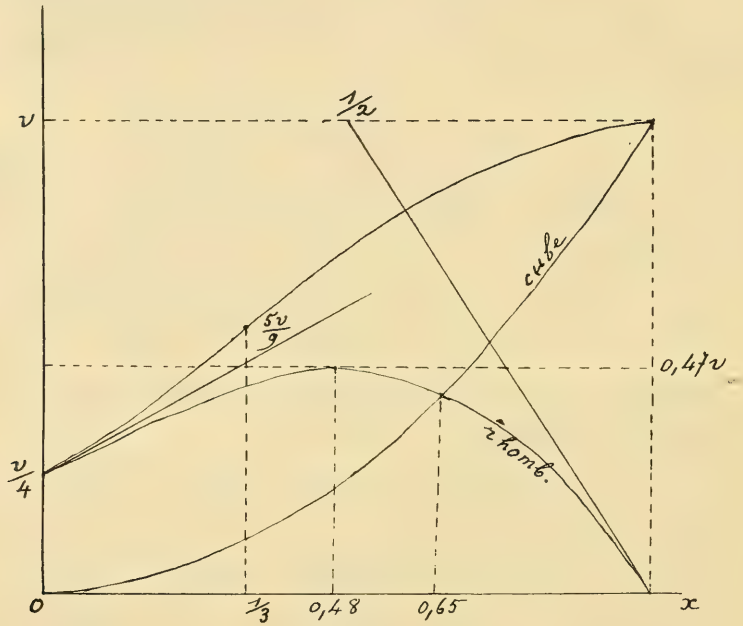


Fig. 12.

Problème II. — *Deux plans, tangents respectivement à l'arête et à l'angle du cube, s'y enfoncent progressivement en marchant parallèlement à eux-mêmes d'un mouvement uniforme, de manière à atteindre simultanément le centre de la face du cube. Chercher la variation des volumes appartenant aux trois formes simples ainsi que celle du volume de la forme composée.*

Soit d'abord (fig. 13) une combinaison quelconque du cube, du rhombododécaèdre et de l'octaèdre, formes dont le développement relatif est donné par a, b, c; nous supposons $c \geqq b$. La trace de la face de l'octaèdre sur la face supérieure du cube

est MN, droite qui coupe sur les parallèles à x, y, menées par le

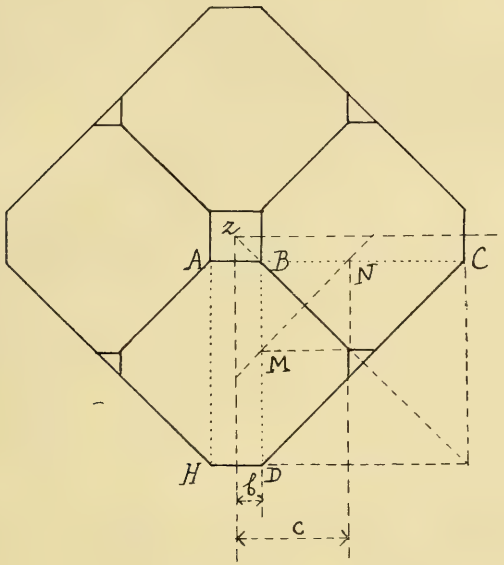


Fig. 13.

centre de cette dernière face, des segments $b + c$. Les segments déterminés sur z par les faces des différentes formes sont donc

	A partir de la face supérieure du cube.	A partir du centre.
Cube.	0	a
Rhombododécaèdre .	b	$a + b$
Octaèdre	$b + c$	$a + b + c$

Les aires des faces projetées sont

$$s_c = 4b^2$$

$$s_r = 2\{c(a - b) - (c - b)^2\}$$

$$s_o = \frac{1}{2}(a + b - 2c)^2.$$

On en déduit

$$V_c = 8ab^2$$

$$V_r = 8(a + b)(ac + bc - b^2 - c^2)$$

$$V_0 = \frac{4}{3}(a + b + c)(a + b + 2c)^2$$

$$V = \frac{4}{3}\{a^3 + 3(b+c)a^2 + 3(b^2 + 2bc - 2c^2)a + 4c^3 + 3b^2c - 6bc^2 - 5b^3\}(*).$$

Dans les conditions du problème, comme dans leur position initiale les traces des plans modifiants sont respectivement à des distances a et $a\sqrt{2}$ du centre de la face supérieure du cube qu'ils doivent atteindre simultanément; la vitesse de la face octaédrique doit être dans le rapport $\sqrt{2} : 1$ à la vitesse de la face du rhombododécaèdre, de sorte qu'à chaque instant la face de l'octaèdre est un triangle BDC ayant chacun de ses sommets respectivement en coïncidence avec un sommet de trois faces carrées appartenant au cube; la face ABDH du rhombododécaèdre est un rectangle et a pour dimensions le côté de la face du cube et celui de la face octaédrique. Les expressions des différents volumes s'obtiennent en faisant, dans les valeurs ci-dessus, $c = b$. On obtient

$$V_c = 8ab^2 = vx^2$$

$$V_r = 8b(a^2 - b^2) = vx(1 - x^2)$$

$$V_0 = \frac{4}{3}(a + 2b)(a - b)^2 = \frac{v}{6}(1 + 2x)(1 - x)^2$$

$$V = \frac{4}{3}(a^3 + 6a^2b + 3ab^2 - 4b^3) = \frac{v}{6}(1 + 6x + 3x^2 - 4x^3).$$

(*) Pour $c \leqq b$, on aurait :

$$s_c = 2(b^2 - c^2 + 2bc), \qquad s_r = 2c(a - b),$$

$$s_0 = (a - c)^2 - \frac{1}{2}\{(a - b)^2 + (b - c)^2\},$$

et

$$V = \frac{4}{3}\{a^3 + 3(b + c)a^2 + 3(b^2 + 2bc - 2c^2)a + c^3 + 3bc^2 - 6b^2c - 2b^3\}.$$

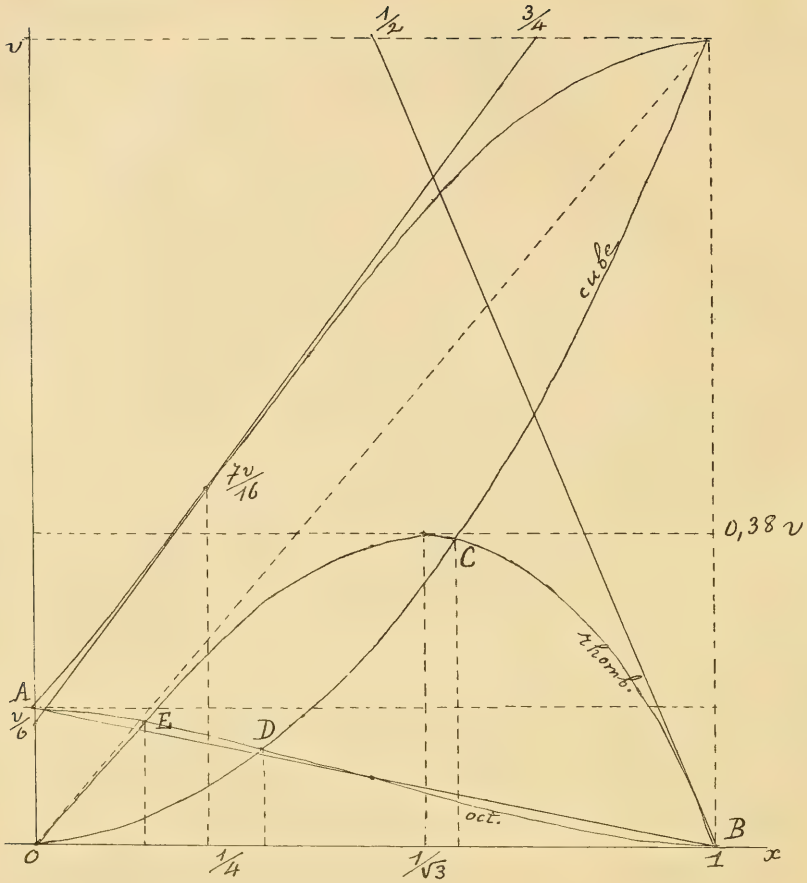

v
1/2
3/4
cube
7v/16
0,38 v
C
rhomb.
A
v/6
E
D
oct.
B
0
1/4
1/√3
1
x

Fig. 14.

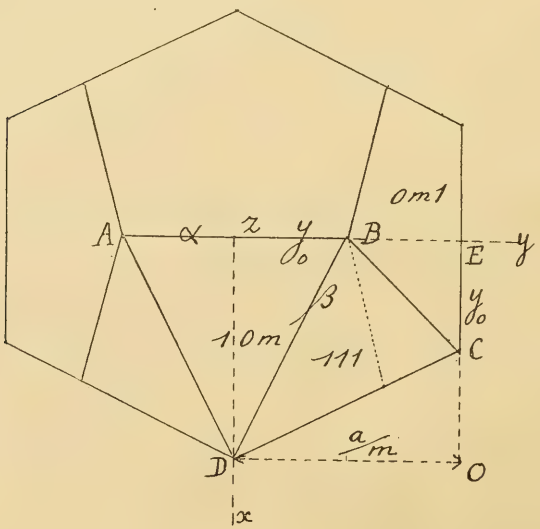

0m1
A
α
z
y
B
E
y
y₀
β
y₀
10m
111
C
a/m
D
O
x

Fig. 15.

La figure 14 montre la variation de ces volumes lorsque x décroît de 1 à 0. Tandis que V_o croît constamment de 0 à $\frac{v}{6}$, le volume relatif au rhombododécaèdre croît d'abord jusqu'à un maximum de $\frac{2v}{\sqrt{3}} = 0{,}3849v$, qu'il atteint pour $x = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}577$, puis décroît jusqu'à 0 en même temps que le volume appartenant au cube. La courbe en V_o, tangente à l'axe des x pour $x = 1$, a sa tangente parallèle à cet axe pour $x = 0$; elle possède un point d'inflexion situé au milieu de la droite AB, point qui est en même temps un centre de la courbe.

La courbe exprimant la variation du volume résultant présente un point d'inflexion pour $x = \frac{1}{4}$; en ce moment, le volume de la forme composée est de $\frac{7v}{16}$.

Pendant le mouvement simultané des plans modifiants, il arrive d'abord un moment (point C) où la partie du volume appartenant au rhombododécaèdre est égale à celle relative au cube; plus loin, en D, on a $V_c = V_o$ et enfin, en E, $V_r = V_o$. Ces trois points sont déterminés par les coordonnées suivantes :

$$\text{C} \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0{,}62 \\ V_c = V_r = \dfrac{v}{2}\left(3 - \sqrt{5}\right) = 0{,}38v \end{cases} \qquad \text{D} \begin{cases} 0{,}54 < x < 0{,}55 \\ V_c = V_0 = 0{,}12v \end{cases}$$

$$\text{E} \begin{cases} x = \dfrac{1}{16}\left(\sqrt{57} - 5\right) = 0{,}159 \\ V_r = V_0 = \dfrac{v}{1024}\left(31\sqrt{57} - 75\right) = 0{,}155v. \end{cases}$$

Problème III. — *Chercher pour quelle valeur de* m *le volume de l'icosaèdre dérivé de l'hexadièdre* m10 *est le plus grand possible par rapport au volume de cet hexadièdre.*

Calculons le volume de l'icosaèdre à l'aide de sa projection sur un plan parallèle à une face du cube (fig. 15). En désignant Bz par y_0, on a

$$s_h = \text{ABD} = y_0 \cdot \frac{a}{m}, \qquad V_h = 4\,\frac{a^2}{m^2}\,y_0.$$

On obtiendra facilement y_0 en écrivant que le point B, dont le z est $\frac{a}{m}$, appartient à la face $0m1$; on obtient

$$y_0 = a\frac{m-1}{m^2}, \quad V_h = 4a^3\frac{m-1}{m^4}.$$

Pour l'octaèdre, on a

$$\begin{aligned} s_0 &= DBC = zEOD - (zBD + BEC + DCO) \\ &= \left(\frac{a}{m}\right)^2 - \frac{1}{2}\left\{\frac{a}{m}y_0 + y_0\left(\frac{a}{m} - y_0\right) + \frac{a}{m}\left(\frac{a}{m} - y_0\right)\right\} \\ &= \frac{a^2}{2m^4}(m^2 - m + 1). \end{aligned}$$

Pour calculer le segment λ que la face octaédrique détermine sur z, il suffit d'écrire que l'équation

$$x + y + z = \lambda$$

de cette face doit être vérifiée par les coordonnées du point B; on obtient

$$\lambda = a\frac{2m-1}{m^2},$$

puis

$$V_0 = \frac{8}{3}\lambda s_0 = \frac{4a^3}{3m^6}(2m-1)(m^2 - m + 1).$$

Le volume de l'icosaèdre est donné par

$$V_i = V_h + V_0 = \frac{4a^3}{3m^6}(5m^3 - 6m^2 + 3m - 1). \qquad (6)$$

On a vu précédemment que le volume de l'hexadièdre $m10$ est

$$V_H = 4a^3\frac{2m-1}{m^3(m+1)};$$

de sorte que le rapport dont il s'agit de chercher le maximum est

$$u = \frac{V_i}{V_H} = \frac{m+1}{3m^3(2m-1)}(5m^3 - 6m^2 + 3m - 1). \qquad (7)$$

On a

$$u' = -\frac{1}{m^4(2m-1)^2}(m^4 - 4m^3 + 5m^2 - 4m + 1)$$

$$u'' = \frac{2}{m^5(2m-1)^3}(2m^5 - 12m^4 + 22m^3 - 25m^2 + 12m - 2).$$

L'équation réciproque obtenue en égalant u' à 0, revient à

$$m^2 - 3m + 1 = 0$$

et a pour racine plus grande que l'unité

$$m = \frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{5}\right) = 2{,}618;$$

le rapport maximum a pour valeur

$$u = \frac{5}{3}\left(5 - 2\sqrt{5}\right) = 0{,}8798.$$

La dérivée seconde s'annule pour

$$3{,}9 < m < 3{,}91;$$

la valeur de u correspondant au point d'inflexion est

$$u = 0{,}8747.$$

Pour $m = \infty$, $u = \frac{5}{6} = 0{,}833$. Pour une valeur de m très approximativement égale à 1,4, u prend la même valeur que pour $m = \infty$. On voit que u varie entre des limites très resserrées :

$m =$	1,4	1,5	2	$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$	3	3,91	4	. . .	∞
$u =$	0,833	0,849	0,875	0,8798	0,879	0,8747	0,874	. . .	0,833.

Si l'on cherche les angles dièdres et les arêtes de l'icosaèdre correspondant au maximum, on trouve

$$\cos\alpha = \frac{m^2-1}{m^2+1} = \frac{\sqrt{5}}{3}, \qquad \cos\beta = \frac{m+1}{\sqrt{3}\sqrt{m^2+1}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\delta = \frac{2a(m-1)}{m^2} = 2a\left(\sqrt{5}-2\right),$$

$$\Delta = \frac{a}{m^2}\sqrt{2(m^2-m+1)} = 2a\left(\sqrt{5}-2\right);$$

de sorte que l'icosaèdre, dont le volume est un maximum, par rapport à celui de l'hexadièdre, dont il dérive, est l'*icosaèdre régulier.*

Dérivation de l'icosaèdre et du dodécaèdre régulier en partant du cube.

Les valeurs obtenues ci-dessus conduisent à de curieuses relations entre l'icosaèdre régulier, le dodécaèdre et le cube qui leur est circonscrit (*) :

Icosaèdre. — La valeur du demi-côté de l'icosaèdre dérivé de l'hexadièdre $m10$ est

$$y_0 = a \cdot \frac{m-1}{m},$$

dans le cas où l'on suppose que le côté du cube circonscrit est $2a$ (**); comme, pour l'icosaèdre régulier,

$$m = \frac{3+\sqrt{5}}{2},$$

il vient (fig. 16)

$$\mathrm{CB} = \frac{a}{2}\left(\sqrt{5}-1\right),$$

c'est-à-dire que CB est le plus grand segment de CE partagé en moyenne et extrême raison ; ainsi

Le côté de l'icosaèdre régulier est le plus grand segment du côté du cube circonscrit partagé en moyenne et extrême raison.

On tire de là un moyen très simple de construire l'icosaèdre régulier en partant du cube; après avoir mené par les centres de trois faces du cube, adjacentes au même sommet, des droites DE, D′E′, D″E″ parallèles aux côtés et perpendiculaires deux à deux, on partage CE, CD, ... en moyenne et extrême raison, de manière que CB soit le plus grand segment; on obtient ainsi en A, B, A′, B′, A″, B″ les sommets de l'icosaèdre, sommets

(*) J'ignore si ces propriétés sont connues.

(**) Dans le problème précédent, le cube circonscrit avait pour côté $2\frac{a}{m}$; il faut donc ici multiplier les dimensions linéaires par m, les volumes par m^3.

qu'il suffira de joindre; sur les faces opposées du cube, les droites telles que ED seront tracées parallèlement aux premières. S'il s'agit de construire un modèle en plâtre, après avoir tracé les droites AB, A'B', etc., sur les faces du cube, on mènera par B', dans la face antérieure, la parallèle à DE; le plan à con-

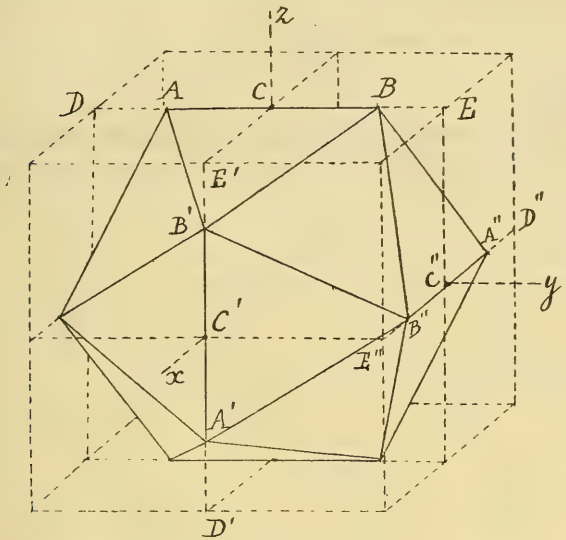


Fig. 16.

duire sera déterminé par cette parallèle et par DE; en opérant de même sur les autres arêtes, on obtiendra un dodécaèdre pentagonal dont on tronquera les sommets auxquels aboutissent les axes ternaires. Le volume de l'icosaèdre sera donné par la formule (6):

$$V_i = \frac{v}{6m^3}(5m^3 - 6m^2 + 3m - 1),$$

dans laquelle v est le volume du cube primitif et $m = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$; on obtient

$$V_i = \frac{5v}{12}\left(\sqrt{5} - 1\right) = 0{,}515\,v.$$

Dodécaèdre régulier. — C'est un hexadièdre dans lequel les

angles dièdres sont égaux ; si $10m$ est sa notation, on doit avoir

$$m^2 - m - 1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad m = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right).$$

En supposant que le côté du cube circonscrit est $2a$, on a (fig. 17)

$$AC = y_0 = a\,\frac{m-1}{m} = \frac{a}{2}\left(3 - \sqrt{5}\right);$$

c'est-à-dire que

Le côté du dodécaèdre régulier est le plus petit segment du côté du cube circonscrit partagé en moyenne et extrême raison (*).

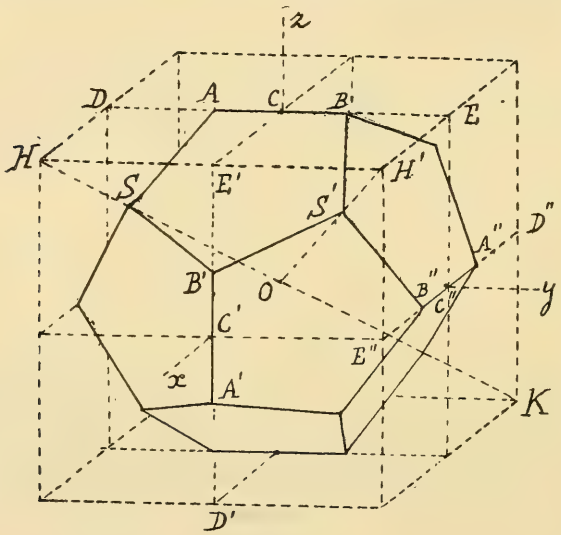


Fig. 17.

Si, pour déterminer les sommets tels que S′, on cherche l'intersection de la face du dodécaèdre avec l'axe ternaire, on trouve pour les coordonnées de S′,

$$x = y = z = a\,\frac{m}{m+1} = \frac{a}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right);$$

(*) Ce côté est donc représenté par AD dans la figure 16.

il s'ensuit que

$$OS' = OH' \times \frac{\sqrt{5} - 1}{2},$$

c'est-à-dire que

La diagonale du dodécaèdre régulier dirigée suivant un axe ternaire est le plus grand segment de la diagonale du cube circonscrit partagée en moyenne et extrême raison.

Comme l'icosaèdre, le dodécaèdre se tire très facilement du cube : après avoir déterminé, comme il vient d'être dit, les sommets A, B, A′, B′, A″, B″, on mènera dans la face antérieure, par B′, la parallèle à DE, parallèle qui, avec cette dernière droite, déterminera le plan à conduire; on tronquera de même toutes les arêtes du cube. Le volume du dodécaèdre régulier sera donné par la formule relative au volume des hexadièdres (voir page 11) :

$$V_d = v \cdot \frac{2m - 1}{2(m + 1)} = \frac{v\sqrt{5}}{4}\left(3 - \sqrt{5}\right) = 0{,}427\, v.$$

EXPOSÉ ÉLÉMENTAIRE

DES PRINCIPES DE

SACCHARIMÉTRIE OPTIQUE

PAR

G. CESÀRO

CORRESPONDANT DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE

ET

P. BUSSY

DIRECTEUR DE L'ÉCOLE SUCRIÈRE BELGE.

AVEC APPENDICE PAR G. CESÀRO.

AVANT-PROPOS

Nous pensons faire œuvre utile en publiant ce petit travail. Les livres dans lesquels la saccharimétrie optique est exposée par une méthode élémentaire sont, il faut bien le dire pour expliquer la raison d'être de notre publication, ou bien remplis d'erreurs, ou bien rédigés de manière que les principes s'y noient dans les détails relatifs aux pièces qui composent les appareils. N'a-t-on pas, par exemple, expliqué la déviation de la vibration produite par le quartz demi-onde du saccharimètre Laurent par une rotation de 180° de la composante *normale à l'axe?*

Nous avons évité l'emploi de formules trigonométriques, de manière que ce travail est à la portée de tous les lecteurs. Les principes d'optique nécessaires se trouvent exposés dans les premières pages; le lecteur qui se sera familiarisé avec ces principes trouvera très aisée l'explication des différents types de saccharimètres. Nous sommes même parvenus à traiter le saccharimètre Laurent par une méthode absolument élémentaire, à l'aide d'un tracé graphique permettant de suivre avec

la plus grande facilité, pendant la rotation de l'analyseur, le rapport des intensités lumineuses des deux demi-disques.

Le travail se termine par un Appendice dans lequel ont été traitées quelques questions spéciales : on y trouvera, notamment, la théorie du saccharimètre Laurent à lumière blanche et à compensateur.

EXPOSÉ ÉLÉMENTAIRE

DES PRINCIPES DE

SACCHARIMÉTRIE OPTIQUE

Préliminaires.

Lorsqu'un rayon de lumière naturelle RI (fig. 1) rencontre un cristal, en général, en pénétrant dans ce dernier, deux phénomènes se produisent :

1° Le rayon se divise en deux rayons réfractés IO, IE, qui se rapprochent de la perpendiculaire IS à la face sur laquelle tombe le rayon et qui sont situés dans le plan SIR déterminé par cette perpendiculaire et par le rayon incident;

2° Tandis que dans le rayon R les vibrations de l'éther, qui déterminent les phénomènes lumineux, s'effectuaient dans toutes les directions normales au rayon, pendant et après le passage les vibrations, sur chaque rayon réfracté, deviennent parallèles entre elles; sur IE, les vibrations s'effectuent dans MNPQ, section faite dans le cristal par le plan SIR contenant les deux rayons réfractés; sur IO, les vibrations sont perpendiculaires à MNPQ. *Un rayon sur lequel les vibrations s'effectuent parallèlement à une même droite* est dit *polarisé,* et l'on appelle *plan de polarisation* le plan perpendiculaire à la direction des vibrations (*). Ainsi le plan de polarisation de IO est MNPQ.

(*) Il est bon de substituer à l'idée du *plan de polarisation,* l'idée plus simple de la *direction de vibration.*

Polariseur. — Pour polariser un rayon lumineux, il suffit, d'après ce qui précède, de lui faire traverser un cristal transparent; après passage, on obtient deux rayons polarisés dont l'un

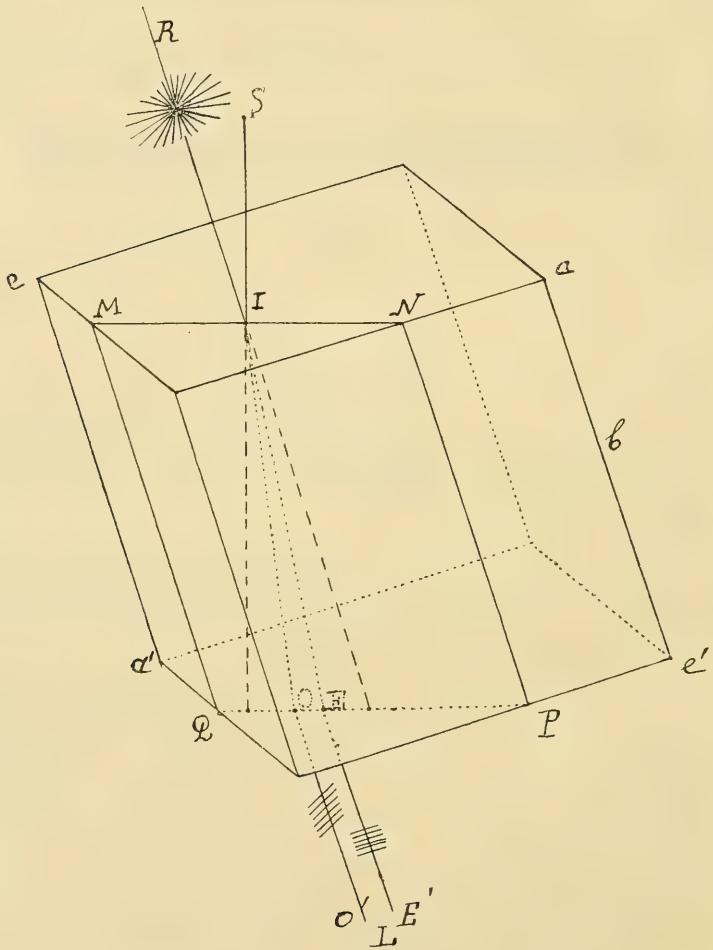


Fig. 1.

vibre dans le plan d'incidence SIR, l'autre perpendiculairement à ce plan. Le cristal employé est celui du carbonate calcique rhomboédrique, limpide, appelé spath d'Islande : le rhomboèdre

est un parallélépipède dont les arêtes concourant en deux sommets opposés a, a', constituent des angles dièdres égaux qui, dans le spath, sont de 105°5′. On suppose le rayon incident parallèle à l'arête b; la section MNPQ, faite dans le cristal par le plan d'incidence SIR, est appelée *section principale* du cristal au point I; cette section contient donc le rayon incident et les deux rayons réfractés; mais, tandis que l'un de ces rayons, IE, vibre dans la section principale, l'autre, IO, vibre normalement à cette section. Le premier de ces rayons est appelé *extraordinaire*, l'autre, *ordinaire* (*).

Nicol. — A la sortie du spath les rayons deviennent parallèles à R; l'œil placé en L aperçoit deux images de la source d'où émane le rayon R, l'une sur le prolongement de O′O, l'autre sur celui de E′E. Pour éviter la confusion due à cette double image, on pourrait, à l'aide d'un écran portant une petite ouverture, ne laisser passer que l'un des rayons réfractés qui émergent du rhomboèdre de spath. Mais cette disposition est incommode.

Nicol a imaginé d'arrêter un des rayons, le plus rapproché de la normale (ici le rayon ordinaire), en se basant sur le principe de la réflexion totale (voir Note, p. 40) : il suffit d'interposer sur le passage des rayons à travers le spath une substance transparente (baume de Canada) dans laquelle la vitesse de propagation de la lumière est intermédiaire entre celle des rayons O et E (**); pour une inclinaison convenablement choisie de la couche de baume, le rayon E la traverse, tandis que O ne peut y pénétrer et, réfléchi latéralement par elle, est absorbé par la monture de l'appareil. *Un nicol ne transmet donc qu'un seul rayon, vibrant dans sa section principale,* c'est-à-dire parallè-

(*) Dans le spath, le rayon extraordinaire E est plus écarté de la normale que le rayon ordinaire O. Dans d'autres substances, le contraire arrive: ces dernières sont appelées *positives;* les substances analogues au spath, *négatives.*

(**) On scie le rhomboèdre de spath suivant un plan approximativement perpendiculaire à *ae* et l'on recolle les deux parties en interposant entre elles une couche de baume de Canada. Le prisme de spath ainsi modifié porte le nom de *nicol.*

lement au plan de symétrie *aea'e'*, passant par la diagonale *ae* qui joint les sommets obtus de la base du rhomboèdre. *Tout rayon vibrant perpendiculairement à la section principale d'un nicol est arrêté par ce dernier* et réfléchi latéralement.

Analyseur. — Si l'on considère (fig. 2) deux nicols ayant leurs sections principales P_1 et A parallèles, le rayon qui émerge de P_1 et dont les vibrations 1 sont parallèles à P_1, arrivant sur A, le traversera intégralement, vu que ses vibrations s'effectuent dans A parallèlement à sa section principale. Si, au contraire, on tourne le premier nicol de 90°, de manière que sa section principale vienne en P_2, les vibrations 2 du rayon qu'il transmet étant perpendiculaires à la section A du second nicol, le rayon sera complètement absorbé par ce dernier, et pour l'œil qui examine à travers A le rayon venant de P_2, il y aura *obscurité* complète.

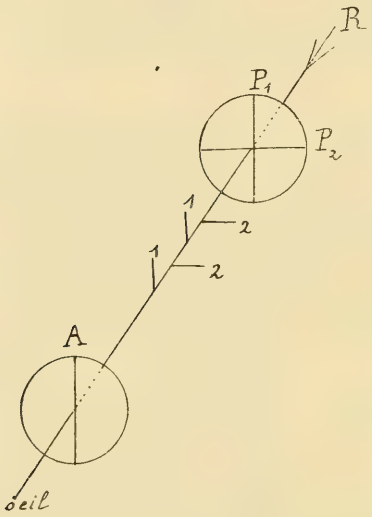


Fig. 2.

Dans cette seconde position, on dit que les *nicols* sont *croisés*, dans la première, on dit que les *nicols* sont *parallèles*. Le premier nicol, qui a pour but de polariser le rayon de lumière naturelle R, est appelé polariseur; le second, à travers lequel l'œil observe le rayon provenant du polariseur, s'appelle *analyseur*. Si la section du polariseur prend une position intermédiaire entre P_1 et P_2, le mouvement vibratoire du rayon émanant du polariseur se décomposera, comme dans le cas d'un rayon de lumière naturelle (fig. 1), en deux : l'un dont la vibration est dirigée suivant A, l'autre qui vibre perpendiculairement à A; ce dernier est absorbé, le premier traversera l'analyseur et le champ de l'appareil sera partiellement éclairé, l'éclairement étant d'autant plus faible que la section du polariseur se rapproche plus de P_2.

Ce qui se passe lorsqu'une lame cristalline est interposée entre deux nicols croisés. — Si l'on fait traverser une lame cristalline par un rayon R (fig. 3) qui lui est perpendiculaire et qui vibre suivant OP, on constate, en général, que le mouvement se décompose suivant deux directions privilégiées, Ox, Oy, que nous appellerons *axes de la lame*, perpendiculaires entre elles, dont l'une analogue à la section principale d'un prisme de spath. A la sortie, on recueille deux rayons en coïncidence géométrique (*) vibrant, l'un parallèlement à x, l'autre parallèlement à y. Mais si la vibration incidente OP est dirigée suivant y, la composante suivant x étant nulle, à la sortie on n'aura qu'un seul rayon vibrant parallèlement à y, c'est-à-dire à la vibration incidente; un fait analogue se passe si OP est dirigée suivant x.

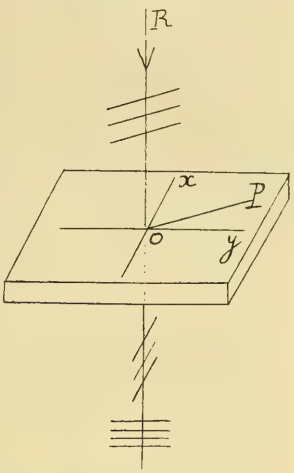


Fig. 3.

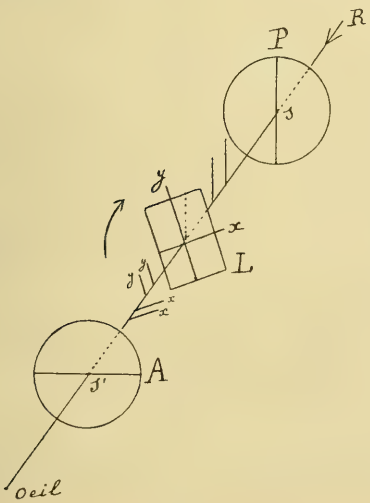


Fig. 4.

Il suit de là que si l'on place une lame cristalline L (fig. 4) entre deux nicols fixes P et A, croisés à angle droit, et que l'on donne à L une rotation autour de ss', en général le champ sera éclairé; en effet, la vibration P émergeant de L suivant x et y, qui ne sont pas normales à A, l'analyseur ne pourra

(*) Ici il n'y a pas de déviation parce que le rayon incident est perpendiculaire à la surface de séparation des deux milieux.

arrêter complètement ni l'une ni l'autre composante. Mais au moment où l'une des directions x, y vient se placer parallèlement à P, celle-ci traverse la lame sans déviation et le champ devient obscur, comme s'il n'y avait pas de lame cristalline interposée; ce qui peut s'énoncer :

Lorsqu'une lame cristalline, placée entre deux nicols croisés, tourne autour de sa normale, il existe deux positions à angle droit pour lesquelles la lame s'éteint. Entre ces positions, le champ est éclairé, et l'éclairement est d'autant plus faible que l'un des axes de la lame s'approche plus de la section de l'un des nicols.

Exceptions. — *Cas où la lame reste constamment éteinte entre les nicols croisés.*

1° Une *lame amorphe,* par exemple une lame de verre, présentant un arrangement moléculaire identique tout autour du point O (fig. 3), il n'y a pas de raison pour qu'une direction soit plutôt privilégiée qu'une autre, c'est-à-dire que toutes les directions sont des axes de la lame. Un rayon polarisé qui traverse une telle lame conserve à la sortie la même direction de vibration, de sorte que la lame *restera éteinte entre les nicols croisés à n'importe quel moment de sa rotation.*

En général, les liquides transparents agissent de même.

2° *Certaines lames cristallines jouissent de la même propriété.* — Il est en général facile de prévoir, par des raisons de symétrie, quelles sont les directions privilégiées d'une lame : ainsi, dans un corps cristallisant en parallélépipède rectangle (fig. 3), une lame taillée parallèlement à une face de ce solide aura ses axes parallèles à ses côtés.

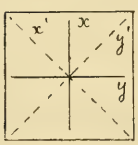


Fig. 5.

Lorsqu'il n'y a pas de raison pour qu'un couple rectangulaire de directions soit plutôt privilégié qu'un autre, la lame se comporte comme un corps amorphe et reste éteinte, dans n'importe quelle position, entre les nicols croisés. Ainsi, dans un prisme à base carrée, une section faite parallèlement à la base se comportera comme une lame amorphe, parce qu'il y a deux couples possibles d'axes (fig. 5), xy et $x'y'$. Plus générale-

ment, *lorsqu'un cristal possède une droite autour de laquelle les éléments se répètent symétriquement par* 3, 4, 6, *une section normale à cette droite, appelée axe de symétrie d'ordre supérieur à* 2, *restera constamment éteinte entre les nicols croisés*, parce que tout couple de directions privilégiées se répéterait autour de cet axe.

Exemple. — Dans le rhomboèdre (fig. 1), une lame parallèle à l'une de ses faces aura pour axes ses diagonales et ne s'éteindra entre les nicols croisés que lorsque le couple rectangulaire formé par celles-ci viendra se placer parallèlement au couple rectangulaire formé par les sections des nicols. Au contraire, une lame taillée perpendiculairement à la droite *aa'*, droite autour de laquelle les éléments se trouvent rangés symétriquement par 3 et qui est donc un axe de symétrie d'ordre 3, restera constamment éteinte entre les nicols croisés.

Polarisation rotatoire.

Si l'on taille dans un cristal de quartz ($Si\,O^2$) une lame L normale à l'axe *zz'* (fig. 6), qui est un axe de symétrie d'ordre supérieur (*), et qu'on l'interpose entre deux nicols croisés, comme nous nous trouvons dans le 2° examiné ci-dessus, l'obscurité devrait persister. Or, on constate que cela n'est pas et que, lors de l'interposition de la lame de quartz, le champ s'éclaire. Mais en tournant l'analyseur dans un certain sens et d'un certain angle, de A en A' par exemple (fig. 7), l'obscurité est rétablie. Comme l'analyseur ne peut éteindre qu'une vibration qui lui est normale, cela prouve que la vibration du rayon émanant du quartz est dirigée suivant P' perpendiculaire à A'. Ainsi une lame de quartz normale à l'axe a la propriété de

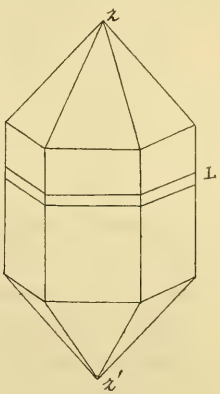


Fig. 6.

(*) En apparence d'ordre 6, en réalité d'ordre 3, parce que les facettes qui modifient le cristal ne se trouvent qu'au nombre de 3 autour d'une extrémité de l'axe.

faire tourner la vibration incidente (*) d'un certain angle pCP', tout en la laissant rectiligne. La rotation de la vibration a lieu tantôt de gauche à droite (c'est le cas de la figure) et le quartz

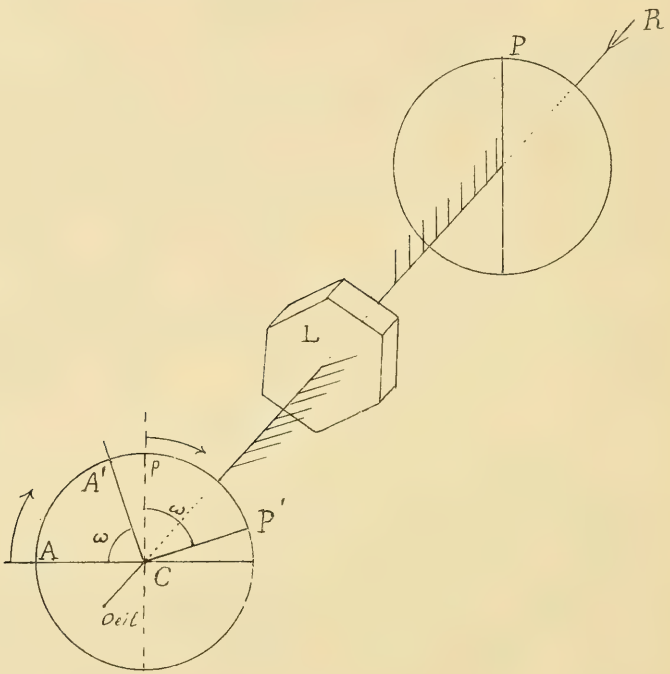


Fig. 7.

est appelé *dextrogyre*, tantôt de droite à gauche et le cristal est dit alors *lévogyre*. On voit que pour rétablir l'obscurité, l'analyseur doit tourner dans le même sens que la vibration et que l'angle ACA', nécessaire pour rétablir l'obscurité, est précisément l'angle dont la vibration a tourné.

Pour une même épaisseur de la lame, la déviation *dépend de la couleur de la lumière monochromatique* (**) *employée* pour éclairer l'appareil : pour une lame ayant *un millimètre* d'épais-

(*) Et par conséquent le plan de polarisation CA.

(**) C'est-à-dire une des lumières simples qui composent la lumière blanche : violet, indigo, bleu, vert, jaune, orangé et rouge.

seur, suivant que la lumière employée est *rouge*, *jaune* ou *violette*, on obtient comme déviation :

$$\omega_r = 17°30', \qquad \omega_j = 24°30', \qquad \omega_v = 44°.$$

Pour une même lumière monochromatique, l'angle de déviation est *proportionnel à l'épaisseur de la lame;* c'est-à-dire qu'une lame de 2 millimètres d'épaisseur donnerait une rotation de 35° pour les rayons rouges, de 49° pour les jaunes, etc.

La combinaison des pouvoirs rotatoires de plusieurs lames superposées se fait par addition ou soustraction suivant que les lames sont de même signe ou de signe contraire; ainsi, l'ensemble d'une lame dextrogyre de 2 millimètres et d'une lame lévogyre de 5 millimètres donnerait une rotation, de droite à gauche, d'amplitude $3 \times 24°30' = 73°30'$, si l'appareil était éclairé par de la lumière jaune.

Couleurs de polarisation en lumière blanche. Teinte sensible. — Supposons que le rayon incident, au lieu d'être monochromatique, soit blanc. Après passage du quartz, la vibration du rouge, qui émergeait du polariseur suivant OP′ (fig. 8), tourne de 17°30′, en supposant l'épaisseur de la lame de quartz de 1 millimètre, et vient en O*r*, la vibration du jaune en O*j*, celle du violet en O*v*. Comme un analyseur ne peut éteindre qu'une vibration perpendiculaire à sa section principale, il est impossible de ramener l'obscurité dans le champ de l'appareil : si l'on fait tourner l'analyseur A dans le sens de la flèche, au moment où A vient en A_r normale à O*r*, le *rouge est éteint*, tandis que les autres lumières colorées qui composent la lumière blanche persistent; on obtiendra donc du *blanc privé de rouge*, c'est-à-dire une teinte dans laquelle le *violet prédomine;* si, en continuant la rotation, l'analyseur vient

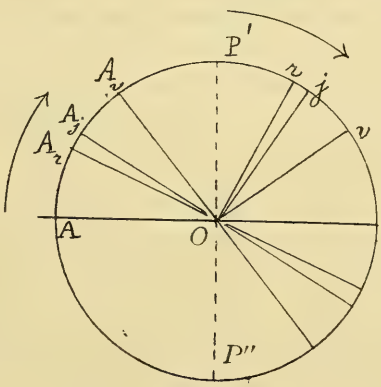


Fig. 8.

en A_v, le violet sera éteint et la lumière qui émerge de l'appareil sera colorée en rouge. Entre les positions A_r et A_v, lorsque la section de l'analyseur se place en OA_j, normale à la vibration Oj du jaune moyen, on obtient une teinte remarquable *gris de lin, fleur de pêcher,* mélange des couleurs extrêmes du spectre. Cette teinte est très facilement reconnaissable : comme le jaune moyen est la couleur la plus vive, la plus sensible à l'œil, la teinte dont il s'agit, qui est privée de jaune, est pâle et terne; si l'on fait tourner l'analyseur tant soit peu à droite ou à gauche, du jaune s'introduit dans le champ, qui paraît s'éclairer; en outre, dans le mouvement vers la gauche, on s'achemine vers la position où le rouge est éteint et le champ *vire au bleu,* tandis qu'une faible déviation vers la droite fait virer le champ *au rouge.* Cette teinte, qui peut donc être obtenue avec une grande précision, est appelée *teinte sensible.* En résumé : *l'apparition de la teinte sensible dans le champ de l'appareil fixe la position pour laquelle la section de l'analyseur est normale à la vibration du jaune moyen.*

Dans ce qui vient d'être dit, on a supposé le cristal dextrogyre; pour un cristal lévogyre, les phénomènes seraient inverses.

Calcul de l'épaisseur des lames de quartz donnant la teinte sensible respectivement entre les nicols croisés et les nicols parallèles. — Pour une lame de 1 millimètre d'épaisseur, on vient de voir que la teinte sensible est obtenue lorsque les sections des nicols font entre elles un angle

$$A_jOP' = 90° - 24°30' = 65°30' \text{ (fig. 8).}$$

Comme la teinte sensible correspond à l'extinction du jaune, si l'on veut l'obtenir entre les *nicols croisés,* fixes en A et P', il faut que la vibration du jaune, qui émerge du polariseur suivant OP', tourne, pendant son passage à travers la lame de quartz, de manière à venir se placer normalement à OA, c'est-à-dire en OP''; l'épaisseur de la lame doit donc être telle que la rotation soit de 180°, c'est-à-dire

$$e = \frac{180}{24,5} = 7^{mm},35 \text{ (*).}$$

(*) Plusieurs auteurs donnent erronément $3^{mm},67$ pour l'épaisseur dont il s'agit.

Si les nicols étaient fixés parallèlement entre eux, c'est-à-dire si A était en P', la vibration du jaune devrait tourner de 90° et l'épaisseur de la lame donnant la teinte sensible serait

$$e = 3^{mm},67.$$

Pouvoir rotatoire des solutions de saccharose. Saccharimétrie.

Biot a constaté que les solutions de saccharose agissent comme le quartz sur la lumière polarisée : la vibration incidente tourne *de gauche à droite* pendant la traversée de la solution, et l'*angle de rotation est proportionnel à la longueur du tube qui contient la solution sucrée, ainsi qu'à la richesse en sucre de celle-ci.* Si donc on dissout des poids égaux du sucre dont on cherche la richesse et de sucre chimiquement pur, dans un même poids d'eau, et qu'on examine les deux solutions dans des tubes de même longueur, éclairés par la même lumière monochromatique, si α et α' sont les déviations respectives produites par les deux solutions, on a, en désignant par x la richesse pour cent du sucre essayé,

$$\frac{x}{100} = \frac{\alpha}{\alpha'}; \quad \text{d'où} \quad x = \frac{100}{\alpha'}\alpha. \tag{1}$$

Tel est le principe de la saccharimétrie. On voit que *le saccharimètre doit simplement nous permettre de mesurer l'angle dont tourne la vibration, donnée par un polariseur, pendant le passage d'une solution sucrée.*

On peut aussi mesurer α' une fois pour toutes : on a trouvé qu'en dissolvant $16^{gr},19$ de sucre pur dans 100 centimètres cubes d'eau, la solution, examinée sous l'épaisseur de 200 millimètres, a le même pouvoir rotatoire que 1 millimètre de quartz, c'est-à-dire 24°,5 pour la lumière jaune. Si donc on se place pour chaque essai dans les mêmes conditions que ci-dessus, c'est-à-dire si l'on pèse $16^{gr},19$ du sucre à analyser, qu'on le dissolve dans 100 centimètres cubes d'eau, qu'on l'examine, en lumière jaune, dans

un tube ayant 200 millimètres de longueur, la formule (1) devient

$$x = \frac{100}{24,5}\alpha = 4,08\,\alpha\ (^*).$$

Les préliminaires donnés dans les premières pages vont nous indiquer les différents moyens que l'on peut employer pour mesurer la rotation α.

A.

Mesure directe de la rotation. Appareils a analyseur mobile.

1° Entre le polariseur fixe (fig. 7) et l'analyseur portant une alidade dont la direction est, par exemple, celle de sa section principale, plaçons d'abord le tube de 200 millimètres rempli d'eau distillée et éclairons l'appareil par une lumière monochromatique. Faisons tourner l'analyseur, l'alidade se mouvant sur un limbe gradué, jusqu'à produire l'obscurité; à ce moment, la section de l'analyseur est perpendiculaire à celle du polariseur, et le rayon transmis par ce dernier vibre normalement à la direction de l'alidade; si l'appareil est bien réglé, dans cette position le zéro de l'alidade coïncide avec le zéro du limbe. Remplaçons le tube rempli d'eau par le tube contenant la solution sucrée; le champ s'éclaire parce que la direction de la vibration ayant tourné de gauche à droite n'est plus normale à la section de l'analyseur; mais en tournant celle-ci dans le même sens, on obtiendra de nouveau l'obscurité au moment où la section est normale à la vibration déviée. L'angle ω que l'alidade a parcouru sur le limbe est évidemment l'angle de rotation demandé. Ce moyen n'est pas très sensible à cause de la difficulté qu'il y a à juger du moment précis où l'obscurité est complète.

2° *Appareil à pénombre.* — Que l'on coupe un nicol suivant

(*) Par exemple, si $\alpha = 12°$, le sucre titre 49 °/₀. Cette formule donne une idée de l'approximation possible : si la déviation est appréciable à $^1/_{10}$ de degré près, la richesse pourra être estimée avec une approximation de 0,4 °/₀.

deux plans BD, CD (fig. 9) parallèles à ses arêtes longitudinales et également inclinés sur sa section principale AD; que l'on enlève la partie ABCD et que l'on recolle les deux parties qui restent en plaçant les sections BD, CD en coïncidence suivant KD.

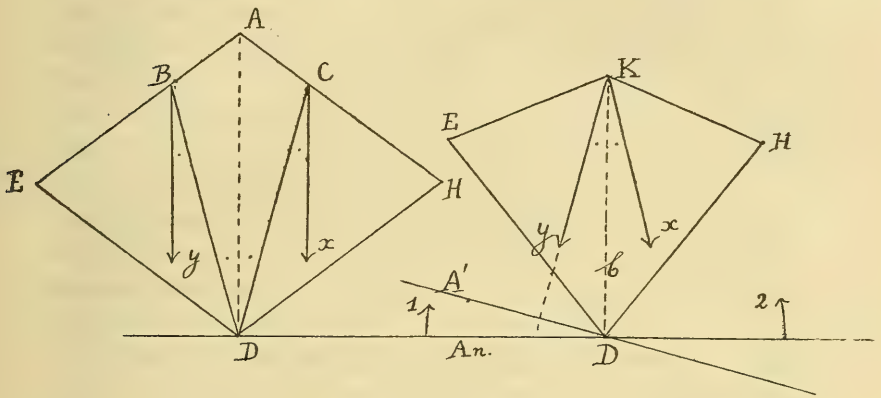


Fig. 9.

On aura ainsi un *binicol* dont la partie de gauche émettra des vibrations parallèles à y, tandis que celle de droite émettra des rayons vibrant parallèlement à x. Lorsque la section A*n*. de l'analyseur sera perpendiculaire à la bissectrice b de l'angle $y\mathrm{K}x$, par raison de symétrie, les deux parties du champ seront *également éclairées*. Si nous donnons à A*n*. une rotation dans le sens de la flèche 1, à un moment donné, A se plaçant normalement à y, en A′, la partie gauche du champ deviendra obscure, tandis que celle de droite sera éclairée, l'éclairement de la partie de gauche décroissant au fur et à mesure que A s'approche de A′ et celui de la partie de droite augmentant parce que A s'approche de la position où elle serait parallèle à x. Le contraire aura lieu si l'analyseur tourne dans le sens de la flèche 2. Donc, lorsque le champ sera uniformément éclairé, on peut affirmer que la section de l'analyseur est normale à la bissectrice b (*).

(*) Il y a une seconde position d'égal éclairement : celle pour laquelle A*n*. coïncide avec b; cette position se distingue de la première par ce fait que l'angle $y\mathrm{K}x$ étant fort petit (ordinairement 5°), dans la position considérée en premier lieu l'éclairage est faible, tandis que dans la seconde il est intense.

L'appareil étant identique à celui du 1°, et l'éclairage étant monochromatique, on tournera l'alidade jusqu'à ce que l'on obtienne l'égal éclairement; si l'appareil est bien réglé, dans cette position le zéro de l'alidade coïncide avec le zéro du limbe. L'introduction du tube contenant la solution sucrée amènera les deux vibrations en x', y' (fig. 10) et la bissectrice b viendra en b' en tournant aussi de l'angle dont les vibrations ont tourné. Le côté gauche du champ sera donc plus éclairé que le droit; mais, en tournant l'analyseur de gauche à droite, au moment où A′ se place perpendiculairement à b', c'est-à-dire au moment où l'angle ADA′ parcouru par l'alidade sur le limbe égale l'angle cherché ω, l'égalité d'intensité se retrouvera rétablie.

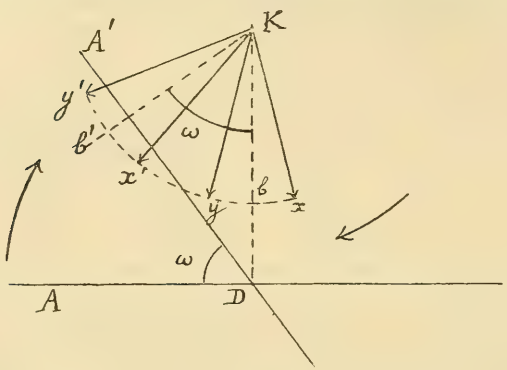


Fig. 10.

Cette méthode est *excellente* parce que l'œil juge avec netteté du moment où deux demi-disques juxtaposés, faiblement éclairés et de même teinte, sont également éclairés, d'autant plus que le moindre écart dans un sens ou dans l'autre rend l'un des demi-disques plus sombre, l'autre plus éclairé (*).

3° *Emploi de la teinte sensible produite par le passage de la lumière blanche dans la solution sucrée.* — Dans la méthode n° 1, au lieu d'employer une lumière monochromatique, éclairons l'appareil par de la lumière blanche; après avoir mis l'appareil au 0°, introduisons la solution sucrée; le champ se colore. En faisant tourner l'analyseur de gauche à droite, arrêtons-nous lorsque la teinte sensible apparaît; en ce moment, la section de l'analyseur étant perpendiculaire à la vibration du jaune moyen,

(*) Voir Appendice I.

l'angle dont nous avons tourné représente la rotation subie par cette vibration.

Outre l'inconvénient de l'incertitude du point 0°, cette méthode a le désavantage de ne pouvoir être employée que lorsque la solution sucrée est bien incolore, car l'apparition de la teinte sensible est plus ou moins masquée par la couleur propre à la solution.

4° *Emploi d'une lame de quartz auxiliaire.* — Introduisons entre les deux nicols une lame de quartz (dextrogyre pour fixer les idées) d'épaisseur quelconque, et, après avoir introduit le tube rempli d'eau et éclairé l'appareil avec de la lumière blanche, tournons l'analyseur de manière à amener la teinte sensible, lisons l'indication de l'alidade sur le limbe gradué; à ce moment, la section de l'analyseur est normale à la vibration du jaune moyen émanant du quartz. Introduisons ensuite la solution sucrée : la vibration jaune sera encore déviée de gauche à droite, la teinte sensible disparaîtra et, pour la faire réapparaître, il faudra tourner l'analyseur de gauche à droite de manière que sa section redevienne normale à la vibration du jaune moyen; une seconde lecture au limbe gradué donnera donc l'angle de rotation de cette vibration.

Si l'on veut que l'appareil soit au zéro lorsque les nicols sont parallèles, il faudra employer une lame de quartz de $3^{mm},7$ d'épaisseur.

Cette méthode évite l'incertitude de la mise au 0° reprochée à la méthode précédente, mais, comme elle, ne peut être employée que pour les solutions incolores.

5° *Emploi d'une bilame de quartz.* — La bilame a pour but de mieux préciser le moment de l'apparition de la teinte sensible. Supposons qu'au lieu de la lame de quartz dont il est parlé dans le 4°, on emploie une lame formée de deux demi-disques juxtaposés, l'un dextrogyre, l'autre lévogyre, ayant chacun $3^{mm},7$ d'épaisseur; la bilame est placée entre les nicols parallèles de manière que le diamètre commun aux deux demi-disques soit parallèle à la section principale des nicols. Lorsque l'appareil est à vide et éclairé par la lumière blanche, la vibration jaune

qui émane du polariseur suivant OP (fig. 11) est déviée de 90° et vient en j_d pour la lame dextrogyre, en j_g pour la lévogyre; la section de l'analyseur se trouve donc normale à la vibration du jaune moyen dans les deux lames, qui prendront la teinte sensible uniforme. Si nous interposons la solution sucrée, les vibrations jaunes seront déviées *toutes les deux* d'un angle ω de gauche à droite : j_d viendra en J_d, j_g en J_g *sur le prolongement de* J_d. La teinte sensible disparaîtra, et, comme à droite la vibration rouge tend à se rapprocher de la perpendiculaire à OA tandis qu'à gauche elle s'en éloigne, à droite nous tendons vers le violet, à gauche vers le rouge : les deux demi-disques seront donc teintés différemment. Mais si nous donnons à la section OA de l'analyseur une rotation de gauche à droite, lorsque cette section viendra se placer en OA′ perpendiculairement à $J_d J_g$, le jaune sera de nouveau éteint dans les deux demi-disques et la teinte sensible réapparaîtra en colorant uniformément le champ. L'angle ω, dont on a dû faire tourner l'analyseur, est l'angle dont la solution sucrée a dévié la vibration du jaune moyen.

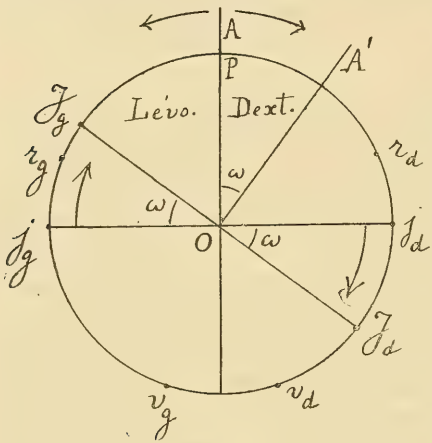


Fig. 11.

Comparaison des appareils a lumière monochromatique avec ceux dans lesquels on emploie la teinte sensible.

Un grand avantage des méthodes dans lesquelles on emploie la lumière monochromatique, est qu'elles peuvent être employées même lorsque la solution sucrée est colorée : on conçoit en effet que si la lumière ne parvient à l'œil qu'à travers un milieu ne se laissant traverser que par une seule couleur, toutes les vibra-

tions autres que celles propres à cette couleur étant arrêtées tout aussi bien avant qu'après l'interposition du liquide sucré, l'œil se trouve identiquement dans les mêmes conditions pendant la mise au 0° et pendant la mesure de la rotation; l'angle mesuré représente exactement la déviation produite par la solution sucrée sur la vibration du rayon dont la couleur est celle du milieu monochromatique interposé entre le liquide et l'œil.

Il n'en est pas de même dans les appareils dans lesquels la mesure est basée sur l'apparition de la teinte sensible en lumière blanche, car la couleur du liquide interposé modifie les conditions d'apparition de cette teinte, et ces conditions ne seront plus les mêmes pendant la mise au 0° et pendant la mesure de la rotation.

Emploi de la teinte sensible quand les solutions sont colorées. Régulateur. — Pour corriger autant que possible, dans les appareils à lumière blanche, l'inconvénient que nous venons de signaler, Soleil, l'inventeur du saccharimètre, a imaginé un dispositif, appelé *producteur de teintes sensibles* ou *régulateur*, qui a pour but d'envoyer à travers le liquide un rayon d'une couleur telle qu'en se combinant avec celle de la solution, elle produise du blanc.

Le régulateur est formé de l'ensemble d'une lame de quartz normale à l'axe et d'un nicol placés dans un tube (fig. 12) qui peut recevoir un mouvement de rotation (*) autour de l'axe de

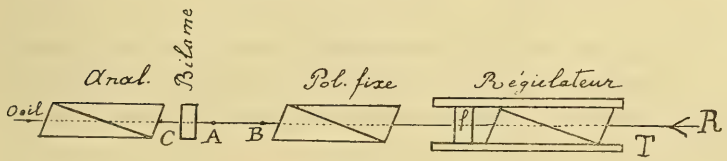


Fig. 12.

l'appareil. La lumière blanche, avant de pénétrer dans le polariseur fixe, passe par le régulateur. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de l'appareil n° 5 : deux nicols parallèles entre

(*) Naturellement la rotation de la lame de quartz est indifférente.

lesquels est placée une bilame donnant la teinte sensible. Demandons-nous d'abord quels sont les rayons qu'émet le polariseur fixe lorsqu'on fait tourner le régulateur : à cet effet, reportons-nous à la figure 8 (page 13), dans laquelle, au lieu de supposer le polariseur fixe, nous supposons A fixe et P′ se mouvant, par exemple, de droite à gauche. Comme les angles que les vibrations déviées r, j, v font avec P′ restent constants, lors de la rotation de P′, r, j, v tourneront dans le même sens et du même angle : lorsque r se placera normalement à A, le rouge sera éteint et le rayon émis par l'analyseur virera vers le violet; lorsque j deviendra normal à A, le jaune étant éteint, l'analyseur transmettra un rayon ayant la teinte sensible, etc. Dans notre cas, l'analyseur de la figure 8 est le polariseur fixe et le polariseur mobile est celui du régulateur; on voit que pendant la rotation de ce dernier, le polariseur fixe envoie sur la bilame des rayons vibrant suivant sa section principale mais dont la couleur varie pour chaque position du régulateur. Il est facile à présent de dire quelle sera l'apparence de la bilame vue à travers l'analyseur, pendant la rotation du régulateur. Quelle que soit la couleur transmise par le polariseur fixe sur la bilame, la vibration atteint celle-ci suivant le diamètre commun aux deux demi-disques (fig. 11), les vibrations d'une même couleur simple seront déviées symétriquement par rapport à ce diamètre dans les deux demi-disques, de sorte que les composantes de chaque couleur simple suivant la section de l'analyseur étant les mêmes de part et d'autre, *les deux demi-disques seront également éclairés et uniformément teintés.* Il faut observer que ces teintes ne sont pas de même nature que celles des rayons émis par le polariseur fixe : dans celles-ci, une seule couleur élémentaire est supprimée, celle dont la vibration est normale à la section du polariseur fixe, tandis que, après passage de la bilame et de l'analyseur, outre cette couleur élémentaire, le jaune se trouve aussi éliminé. Les teintes uniformes dont se pare la bilame, vue à travers l'analyseur, pendant la rotation du régulateur, sont donc toutes des teintes qu'on peut appeler *sensibles*, parce que le jaune y manque, et l'opérateur peut choisir l'une d'elles comme teinte de repère. La

vraie teinte sensible (*) correspond au moment où la vibration jaune issue du régulateur est placée normalement à la section du polariseur fixe. — Supposons que nous prenions cette vraie teinte sensible comme repère. — Après introduction de la solution sucrée en AB (fig. 12), les deux demi-disques se colorent de teintes différentes, comme il a été dit dans le 5°; en essayant de ramener la teinte sensible par rotation de l'analyseur, on n'y parvient qu'imparfaitement à cause de la couleur propre du liquide interposé; c'est alors qu'en tournant le régulateur, on envoie à travers le liquide un rayon ayant la couleur complémentaire de ce dernier, de manière à annuler son influence; de petits mouvements alternatifs imprimés à l'analyseur et au régulateur permettront de revenir à la teinte qui sert de repère.

B.

Mesure indirecte de la rotation. Appareils a compensation, a analyseur fixe.

Dans les méthodes précédentes, pour mesurer l'angle dont la vibration tourne, on déplace l'analyseur jusqu'à ce que sa section principale se trouve placée par rapport à la vibration comme elle l'était au commencement de l'opération. Dans les méthodes par compensation, au contraire, l'analyseur est fixe, et c'est la vibration déviée par la solution sucrée que l'on fait tourner en sens inverse jusqu'à ce qu'elle reprenne sa position primitive. A cet effet, il suffit de placer sur le trajet des rayons lumineux, entre le tube contenant la solution sucrée et l'analyseur, un biseau (fig. 13) d'une substance dont le pouvoir rotatoire est de sens inverse à celui de la solution (biseau de quartz lévogyre) et dont l'épaisseur variable *e*, située sur le parcours du rayon lumineux, puisse être estimée à l'aide d'une vis graduée qui lui donne le mouvement. On

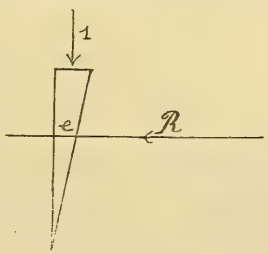


Fig. 13.

(*) Voir Appendice II.

comprend qu'au fur et à mesure que le biseau s'enfonce dans le sens de la flèche 1, l'épaisseur de quartz traversée par le rayon lumineux devenant de plus en plus grande, la vibration, primitivement déviée vers la droite, revient de plus en plus vers la gauche et, à un moment donné, reprend sa position primitive; ce moment sera annoncé par l'identité d'aspect du champ de l'appareil avec l'aspect initial.

S'il a fallu une épaisseur de e millimètres de quartz lévogyre pour *compenser* l'action dextrogyre de la solution sucrée, l'angle de déviation cherché sera

$$\alpha = 24°,5 \, . \, e,$$

si l'on opère en lumière jaune ou que l'on procède par rétablissement de la teinte sensible.

Compensateur. Double biseau. — Un biseau est matériellement impossible à réaliser, car on peut avoir besoin d'épaisseurs trop faibles vers sa partie aiguë; en outre, il faudrait l'enlever de l'appareil pour mettre celui-ci au 0°. Par ces raisons, on forme le compensateur d'un double biseau (fig. 14) : D est dextrogyre, L lévogyre; les deux biseaux sont égaux. Lorsque l'appareil est au 0°, les épaisseurs l des deux biseaux, sur le trajet du rayon lumineux R, sont égales et la rotation est annulée : c'est comme si l'on introduisait l'arête d'un biseau unique. Si, D étant fixe, on fait avancer L, l'épaisseur lévogyre l' sera plus grande que la dextrogyre l et les choses se passent comme si l'on avait introduit sur le trajet du rayon lumineux une épaisseur l'-l de quartz lévogyre.

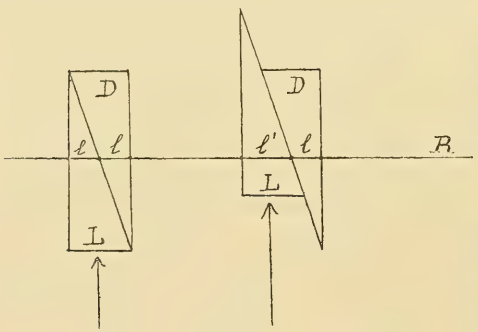


Fig. 14.

Le biseau mobile porte une échelle, le biseau fixe un vernier;

lorsque le zéro de l'échelle coïncide avec le zéro du vernier, l'action du compensateur est nulle; 100 divisions de l'échelle correspondent à 1 millimètre de quartz lévogyre introduit sur le trajet du rayon lumineux, ce qui équivaut (page 15) à une solution de $16^{gr},19$ de sucre pur dans 100 centimètres cubes d'eau, examinée sous l'épaisseur de 200 millimètres. Si donc, dans chaque essai, on pèse $16^{gr},19$ du sucre à analyser, qu'on le dissolve dans 100 centimètres cubes d'eau, qu'on le compense dans un tube ayant 200 millimètres de longueur, le nombre n lu sur l'échelle du compensateur indique directement le pour-cent de saccharose contenu dans le sucre analysé. Effectivement : si le compensateur s'est avancé d'*une* division, c'est qu'il n'a fallu introduire que $^1/_{100}$ de millimètre de quartz pour effectuer la compensation et que, par conséquent, la solution sucrée était 100 fois moins riche que la solution de sucre pur prise pour type : sa richesse saccharine est donc de 1 °/₀; en général, si le compensateur marque n divisions après compensation, c'est que la matière analysée contient n °/₀ de saccharose.

Modification du compensateur ayant pour but d'en faciliter la construction. — Il est plus facile de se procurer deux prismes de quartz égaux de même signe que deux prismes de signe

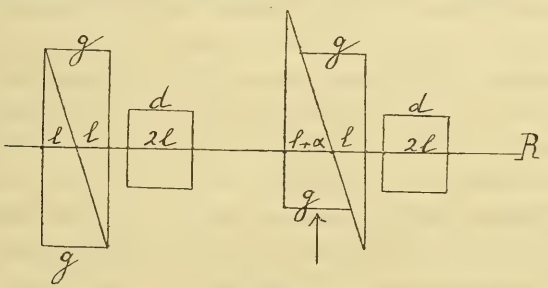


Fig. 15.

contraire : il suffit, pour obtenir les premiers, de scier en deux un parallélépipède rectangle suivant un plan passant par deux arêtes opposées. Le compensateur est formé (fig. 15) de deux biseaux lévogyres égaux g, d'épaisseur médiane l, et d'une lame dextrogyre d'épaisseur $2l$. La lame et l'un des biseaux sont fixes,

l'autre biseau est mobile. Au zéro, l'action de la lame détruit celle des biseaux; après déplacement du biseau mobile, le rayon lumineux traverse une épaisseur $2l + \alpha$ de quartz lévogyre et une épaisseur $2l$ de quartz dextrogyre; c'est, en définitive, une épaisseur α de quartz lévogyre qui a été introduite suivant l'axe de l'appareil.

Différents saccharimètres a compensation. — Le compensateur peut être adapté aux différents systèmes énumérés en A (p. 16).

Exemple I. — Considérons le 1°; fixons les nicols à angle droit et introduisons entre eux le compensateur, en éclairant l'appareil par une lumière monochromatique. Au zéro et l'appareil à vide, le champ doit être complètement obscur. En introduisant entre le polariseur et le compensateur la solution sucrée, le champ s'éclaire; en manœuvrant le compensateur, on ramène l'obscurité; la lecture faite au compensateur donne la richesse saccharine.

Exemple II. — Considérons l'appareil 5° (p. 19) avec régulateur (fig. 12); fixons l'analyseur parallèlement au polariseur fixe et ajoutons le compensateur en C. Le compensateur étant au zéro, donnons au régulateur un mouvement de rotation autour de l'axe de l'appareil et observons les teintes, uniformes à un moment donné, mais variables avec la rotation, qui colorent la bilame (*). Toutes ces teintes sont sensibles parce qu'elles manquent de jaune moyen dont la vibration a été envoyée par la bilame perpendiculairement à la section de l'analyseur. Pour choisir la teinte qui est plus sensible (**) à son œil, l'observateur cherche quelle est celle qui, par l'introduction de la plus petite quantité de quartz, s'altère le plus sensiblement sur les deux demi-disques; pour cela, il n'a qu'à toucher légèrement au compensateur. La teinte sensible étant choisie et le compensateur étant au zéro, on introduit la solution sucrée : les deux demi-disques se teintent de couleurs différentes et l'on agit sur le compensateur jusqu'à ce que la teinte sensible uniforme soit ramenée dans le champ de l'appareil.

(*) Voir page 22 l'explication détaillée de ces phénomènes.

(**) Voir Appendice.

Le saccharimètre que nous venons de décrire est celui qui a été imaginé par Soleil, le premier qui ait pensé à mesurer la richesse d'un sucre en se basant sur le pouvoir rotatoire de sa solution; nous avons changé seulement la place de certaines pièces pour rendre l'explication plus aisée.

Exemple III. — Polarimètre à pénombre, à analyseur fixe et compensateur, éclairé par la lumière blanche.

Le polariseur est un binicol (p. 17, fig. 9 et 10); supposons l'analyseur A (fig. 16) fixé perpendiculairement à la bissectrice b; le compensateur étant au zéro, les deux demi-champs doivent être également éclairés et *incolores*. Pour vérifier le 0°, touchons légèrement au compensateur, de manière à introduire une *petite* épaisseur de quartz, dextrogyre par exemple: la vibration x émanant de la partie droite du binicol sera déviée en r, j, v, la vibration y viendra en r', j', v'. On voit :

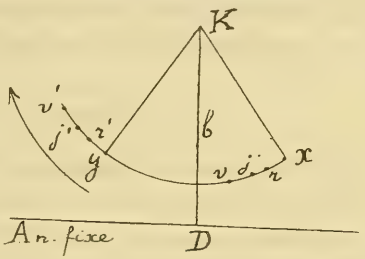


Fig. 16.

1° Que les vibrations de gauche faisant avec l'analyseur un angle plus aigu que dans la position d'égale intensité, le demi-disque de gauche s'éclairera, tandis que dans celui de droite, les vibrations s'approchant de la perpendicularité à l'analyseur, le demi-disque s'assombrit.

2° A droite, la vibration violette fait, avec l'analyseur, un angle plus voisin de 90° que la vibration jaune, et celle-ci un angle plus voisin de 90° que la vibration rouge; dans la lumière émise à droite par l'analyseur, les proportions du jaune, et surtout du rouge, par rapport au violet, seront augmentées, c'est-à-dire que le demi-champ de droite vire au rouge; au contraire, à gauche, c'est le violet qui va prédominer. L'inverse aura lieu si le compensateur introduit une petite épaisseur de quartz lévogyre. Donc, en donnant au biseau mobile du compensateur de petits mouvements dans les deux sens, on pourra déterminer avec précision le zéro correspondant au moment où les deux demi-champs sont *incolores et également éclairés.*

L'interposition de la solution sucrée va détruire l'égalité d'intensité et de teinte, mais, en manœuvrant le compensateur de manière à introduire une épaisseur de quartz lévogyre équivalente à la solution, les vibrations v', j', r' reviendront *simultanément* en y, en même temps que v, j, r prendront la position x; les demi-champs redeviendront incolores et également éclairés.

Différents types de saccharimètre.

Les saccharimètres déduits des principes exposés dans les pages précédentes peuvent se classer ainsi :

A. — Appareils a analyseur mobile.

a) Éclairage monochromatique. Mesurant directement la déviation subie par la vibration d'un rayon d'une certaine couleur.

b) Éclairage par la lumière blanche. Mesurant directement l'angle dont doit tourner l'analyseur pour ramener dans le champ de l'appareil la teinte sensible.

B. — Appareils a analyseur fixe et a compensateur.

a) Éclairage monochromatique. Mesurant indirectement, par l'interposition d'une épaisseur variable de quartz lévogyre, la déviation subie par le rayon d'une certaine couleur.

b) Éclairage par la lumière blanche. Mesurant indirectement l'angle de rotation de la vibration du jaune moyen, par l'interposition d'une épaisseur variable de quartz lévogyre ramenant dans le champ de l'appareil la teinte sensible.

c) Éclairage par la lumière blanche. Binicol comme polariseur. Mesurant indirectement, en ramenant l'égalité d'intensité et la décoloration des deux demi-champs, l'épaisseur de quartz qui équivaut à la solution employée.

Voici les différents saccharimètres appartenant à l'une des catégories indiquées ci-dessus :

Saccharimètre Duboscq. — *A. a*). Éclairage monochromatique. Binicol comme polariseur. Mesure directe de la rotation

par l'analyseur mobile sur un limbe gradué. Disposition des pièces :

Rayon monochr... —> Binicol... Liquide sucré... Analys. mob... OEil.

Saccharimètre Schmidt et Haensch. — B. a). C'est le Duboscq à analyseur fixe et à compensateur. Disposition :

Rayon monochr. —> Binicol... Liq. sucré... Compensat... Anal. fixe... OEil.

Saccharimètre Mitscherlich. — A. b). Deux nicols croisés produisant un champ obscur, qui s'éclaire par l'interposition du liquide sucré. Rotation de l'analyseur jusqu'à production de la teinte sensible. C'est le 3° de la page 18. Disposition :

Ray. blanc —> Pol. fixe... Sol. sucrée... Anal. mobile... OEil.

Saccharimètre Soleil. — B. b). Décrit ci-dessus. Des inventeurs l'ont modifié en changeant la place de certaines pièces comme l'indiquent les dispositions qui suivent :

Soleil. *R. blanc. —> Pol... Bilame... Sol. sucr... Comp... Régul... An... OEil.*
Soleil-Scheibler. *R. bl. —> Pol... Bil... Rég... Sol. sucr... Comp... An... OEil.*
Soleil-Wentzke. *R. bl. —> Pol... Régul... Bil... Sol. sucr... Comp... An... OEil.*

Saccharimètre Laurent.

C'est un saccharimètre de la catégorie *A. a)*, dans lequel la pénombre est produite non par un binicol, mais par une disposition spéciale. Pour l'expliquer, nous allons d'abord nous occuper de la forme qu'une vibration rectiligne prend après avoir traversé une lame cristalline.

Retard d'une lame cristalline. Forme de la vibration au sortir de la lame. — Nous avons vu (p. 9, fig. 3) que lorsqu'un rayon polarisé rectilignement tombe sur une lame cristalline, le mouvement vibratoire se décompose en deux autres mouvements dont les vibrations sont dirigées suivant deux droites rectangulaires privilégiées x, y, que nous avons appelées *axes de la lame.* Ces mouvements se propagent à travers la lame avec des vitesses différentes, de sorte qu'ils emploient des temps différents pour la traverser. La différence de ces temps est appelée *retard de la*

lame cristalline, ce qui veut dire, d'une manière abrégée, *retard relatif que la lame cristalline imprime à l'un des rayons par rapport à l'autre pendant qu'ils la traversent*. Si l'épaisseur de la lame est e, et si v, v' sont les vitesses de propagation des deux rayons vibrant suivant x et y, les temps que ces rayons emploient pour traverser la lame cristalline sont respectivement

$$t = \frac{e}{v}, \quad t' = \frac{e}{v'},$$

de sorte que le retard $\mathfrak{R}$ est donné par

$$\mathfrak{R} = t - t' = e\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v'}\right).$$

On voit que le retard dépend de deux facteurs : l'un, $\frac{1}{v} - \frac{1}{v'}$, inhérent à la nature même du cristal et à la direction suivant laquelle la lame y a été taillée, l'autre, e, qui dépend de l'observateur. On peut donc avec une substance quelconque, et avec une lame qu'on y coupe dans un sens quelconque (*), fabriquer une lame donnant un retard déterminé à l'un des rayons réfractés par rapport à l'autre : il suffit pour cela d'en régler convenablement l'épaisseur.

On peut se demander : La vibration qui était rectiligne à l'entrée de la lame restera-t-elle rectiligne au sortir de celle-ci?

Il est facile de voir qu'en général cela n'est pas : si les mouvements vibratoires composants traversaient la lame dans le même temps, 1 seconde pour fixer les idées, sur la face de sortie, à un moment donné, les composantes seraient les mêmes

(*) Pourvu que v soit différent de v'. Dans les lames ne possédant pas de directions privilégiées (page 10, *Exceptions*), la vitesse est la même dans tous les sens et le *retard est nul* quelle que soit l'épaisseur. Dans un cristal possédant un axe de symétrie d'ordre supérieur, par exemple dans un prisme à base carrée, une section parallèle à la base a un retard nul, tandis que dans une section parallèle à l'axe, v et v' diffèrent le plus entre elles et l'on obtient, pour une certaine épaisseur, le plus grand retard possible; une section intermédiaire entre les deux considérées ci-dessus offrira un retard d'autant plus grand qu'elle se rapproche plus de la seconde.

que celles appartenant au mouvement à l'entrée 1ˢ auparavant, de sorte que les composantes qui étaient contemporaines à l'entrée le seront aussi à la sortie; le mouvement à la sortie, à un moment donné, est donc identique à ce qu'il était à l'entrée 1ˢ auparavant : la vibration restera donc rectiligne, parallèle à l'incidente et de même amplitude (*). Mais il n'en sera plus ainsi si les

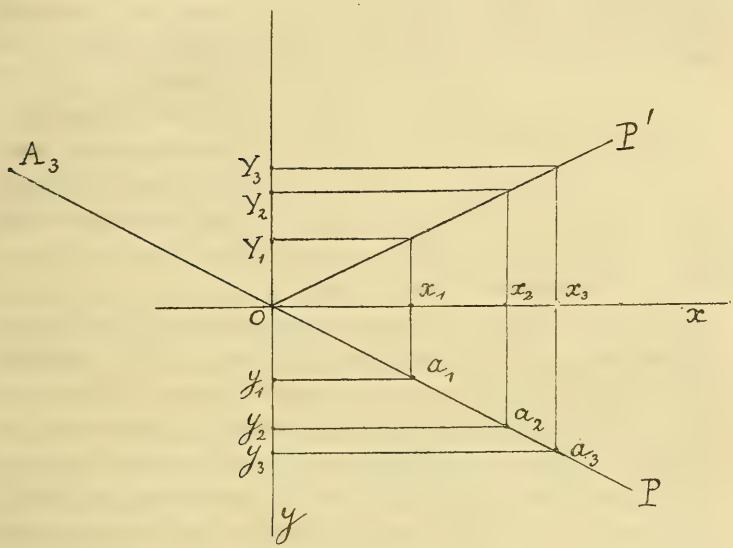


Fig. 17.

deux mouvements composants mettent des temps différents à traverser la lame, par exemple 2ˢ pour le mouvement dans lequel les vibrations s'effectuent suivant x, 1ˢ pour le rayon qui vibre suivant y. Désignons par O, a_1, a_2, a_3 ... (fig. 17) les positions de la molécule vibrante à l'entrée de la lame, aux temps 0, 1ˢ, 2ˢ... Le mouvement x étant en retard de 1ˢ sur le mouvement y à la sortie de la lame, la composante x_1 n'est plus contemporaine avec y_1, mais avec y_2; pour avoir la forme de la vibration, il

(*) Ceci se passe dans les lames à retard nul dont il vient d'être parlé dans la note précédente.

faudra donc composer (fig. 18) x_1 avec y_2, x_2 avec y_3, x_3 avec y_2 (de retour) et ainsi de suite; on en conclut qu'en général la trajectoire sera curviligne. Pour préciser la forme de cette trajectoire, il faudrait préciser la loi d'après laquelle s'accomplit l'oscillation de la molécule (*).

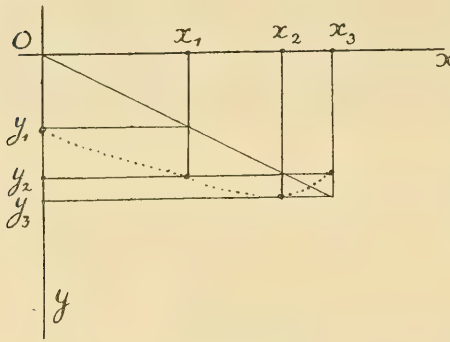


Fig. 18.

Mais, sans préciser cette loi, on peut trouver deux cas importants *où la vibration*, malgré que les deux rayons soient en retard l'un sur l'autre, *reste rectiligne au sortir de la lame.*

a) *Lames donnant aux rayons un retard relatif d'un nombre entier d'ondes.* — Désignons par T le temps d'une *oscillation entière*, c'est-à-dire le temps que met la molécule d'éther *pour aller* (fig. 17) *de sa position d'équilibre* O *en* a_3, *revenir de* a_3 *en* A_3, *puis de* A_3 *en* O. Considérons une lame donnant aux rayons réfractés un retard de T secondes, et supposons que c'est le mouvement x qui est en retard. Lorsque ce dernier mouvement atteint le point O à la sortie, et que la molécule va s'acheminer de O vers x, le mouvement y a déjà atteint ce point T^s avant, de sorte que sur y la molécule vibrante a déjà été de O en y_3, de y_3 en Y_3 et de Y_3 en O; elle s'achemine donc de O vers y simultanément avec la molécule qui s'achemine de O vers x. Les choses se passent comme si le retard n'existait pas et la vibration reste, à la sortie, rectiligne, parallèle à la vibration incidente et de même amplitude. On arriverait au même résultat si l'on supposait que le retard de la lame était de 2T, 3T, ... nT, c'est-à-dire

(*) Cette oscillation s'effectue d'après la même loi que celle du pendule; on en déduit que la vibration rectiligne devient elliptique à la sortie de la lame cristalline.

si la lame donne aux rayons, suivant l'expression employée, *un retard* relatif *d'un nombre entier d'ondes*. Ainsi :

Dans toute lame cristalline donnant aux rayons réfractés un retard relatif d'un nombre entier d'ondes, la vibration, rectiligne à l'entrée, reste rectiligne à la sortie, parallèle à la vibration incidente et de même amplitude.

Une conclusion importante est qu'une telle lame restera éteinte entre les nicols croisés dans n'importe quelle position, comme s'il s'agissait d'une lame amorphe ou d'une lame sans directions privilégiées (p. 10, *Exceptions*).

b) *Lame demi-onde.* — Supposons que le rayon vibrant suivant x soit en retard, à la sortie, de $\frac{T}{2}$ sur le rayon vibrant suivant y (fig. 17). Lorsque le premier rayon atteint la face de sortie, au moment où la molécule O va s'acheminer vers x, le rayon vibrant suivant y a déjà atteint la même face $\frac{T}{2}$ secondes avant, de sorte que sur y la molécule vibrante a déjà été de O en y_3, puis est revenue de y_3 en O et se dispose à se diriger de O vers Y_3 au moment où, suivant x, la molécule quitte O pour se diriger vers x. Comme le mouvement d'oscillation est symétrique de part et d'autre de la position d'équilibre, 1', 2', 3' après le moment que nous venons de considérer, la molécule vibrante occupera sur y les positions Y_1, Y_2, Y_3 symétriques respectivement de y_1, y_2, y_3 par rapport à O, de sorte que la composition des composantes contemporaines nous donnera une droite OP' symétrique de OP par rapport à Ox. La *vibration restera donc rectiligne, mais sera déviée par rapport à la vibration incidente, tout en conservant la même amplitude.* Il est clair que la même propriété subsiste pour des lames donnant aux rayons réfractés un retard relatif de $3\frac{T}{2}$, $5\frac{T}{2}$, ... Ainsi :

Dans toute lame donnant aux rayons réfractés un retard relatif d'un nombre impair de demi-ondes, la vibration, rectiligne à l'incidence, est aussi rectiligne à l'émergence, et sa direction est symétrique de la vibration incidente par rapport aux axes de la lame. Son amplitude reste la même.

On peut observer qu'une lame demi-onde, placée avec ses

axes à 45° de deux nicols croisés (fig. 19), rend complètement lumineux le champ de l'appareil; en effet, la vibration P du polariseur se plaçant, à l'émergence, symétriquement à P par rapport à x, coïncide avec la section A de l'analyseur et est, par conséquent, transmise intégralement par celui-ci. Si, au contraire, les axes restant à 45° de P, les nicols étaient parallèles, c'est-à-dire que A coïncidait avec P, la vibration se plaçant à l'émergence perpendiculairement à la section de l'analyseur, le champ serait obscur.

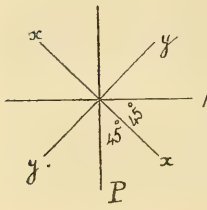


Fig. 19.

Saccharimètre Laurent. — Cet appareil se compose essentiellement d'un polariseur (fig. 20) qui peut être *fixé* dans une

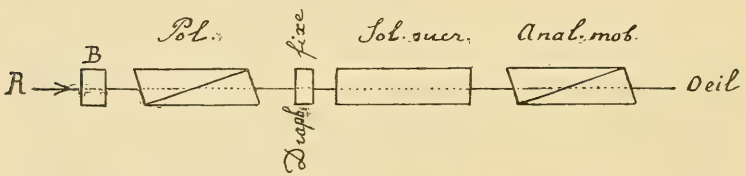


Fig. 20.

position quelconque en le faisant mouvoir autour de l'axe de l'appareil, placé devant un diaphragme *complètement fixe* sur lequel il envoie des rayons monochromatiques (*) polarisés; ce diaphragme est un disque de verre portant sur une de ses moitiés une lame cristalline demi-onde (**) avec l'un de ses axes

(*) On emploie comme source lumineuse la flamme colorée en jaune par du chlorure sodique; pour rendre cette lumière bien monochromatique, Laurent place en B un petit vase parallélépipédique rempli d'une solution de bichromate de potassium, qui absorbe les quelques rayons bleus ou violets que la flamme sodique paraît émaner.

(**) Laurent emploie une lame de quartz parallèle à l'axe, mais on peut employer n'importe quelle substance cristalline. Dans le cas du quartz parallèle, l'épaisseur de la lame demi-onde est très approximativement de *3 centièmes de millimètre.*

placé parallèlement au diamètre qui sépare les deux demi-disques. L'analyseur est mobile et porte une alidade parcourant un limbe gradué. Supposons (fig. 21) le polariseur fixé en P et voyons quelle est l'apparence du diaphragme vu à travers l'analyseur placé en A : la vibration P traverse la lame de verre sans déviation et l'amplitude de sa composante suivant la section de l'analyseur est OM; au contraire, à travers la lame cristalline, la vibration déviée émerge en P′ symétrique de P par rapport aux axes de la lame; son amplitude OP′ est égale à OP et sa composante suivant la section de l'analyseur est ON. Comme l'intensité est d'autant plus grande que l'amplitude est plus grande (*), il s'ensuit qu'en général les deux demi-disques seront différemment éclairés; ainsi, dans la position figurée, la partie de gauche (amplitude ON) sera à peine éclairée, tandis que celle de droite (amplitude OM) le sera fortement. On peut mieux suivre la différence d'éclairement pendant la rotation de l'analyseur en observant que les points analogues à M, à cause de $\widehat{M} = 90°$, se trouvent sur la circonférence décrite sur OP comme diamètre, tandis que les points analogues à N constituent une circonférence décrite sur OP′ comme diamètre.

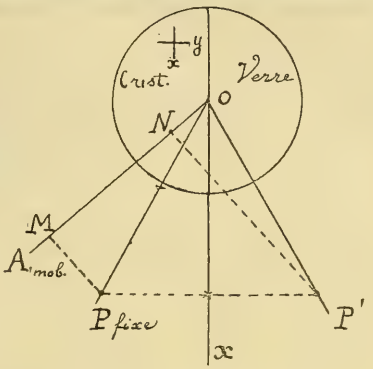


Fig. 21.

Dans une position quelconque OA′ (fig. 22) de l'analyseur, les segments OL, OV interceptés par les deux circonférences représenteront les amplitudes dans les deux demi-disques, la circonférence relative au verre étant celle de gauche; on peut par cette méthode s'expliquer toutes les particularités du phénomène :

Supposons d'abord l'analyseur en OX suivant l'un des axes

(*) L'intensité est proportionnelle au carré de l'amplitude.

de la lame, puis donnons-lui un mouvement de rotation dans le sens de la flèche. Dans la position initiale, les segments interceptés par les deux circonférences sur OX sont égaux à OI; donc même éclairement pour les deux demi-disques. Lorsque l'analyseur s'achemine vers A′, l'éclairement de la lame (amplitude OL) va en diminuant, celui du verre (amplitude OV) va en augmentant, de

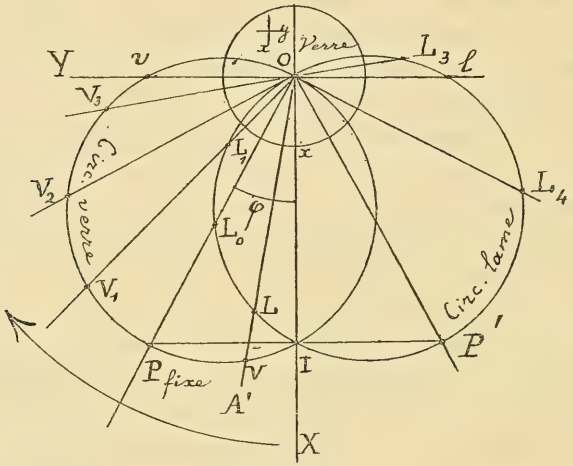


Fig. 22.

sorte que le demi-disque de gauche va en s'obscurcissant, l'autre en s'éclaircissant. Lorsque l'analyseur atteint OP, section du polariseur, l'éclairage du verre atteint son maximum, puis décroît; pendant ce temps, l'éclairage de la lame cristalline continue à décroître et, lorsque l'analyseur vient en OV_2 tangente au cercle de la lame (donc perpendiculaire à P′), le segment intercepté par le cercle de la lame est nul, et celle-ci s'éteint; quant à l'éclairement du verre, il correspond à l'amplitude OV_2. A partir de ce moment, la lame s'éclaire de plus en plus, tandis que l'éclairement du verre continue à décroître, tout en restant supérieur à celui de la lame; ainsi, lorsque l'analyseur arrive en OV_3, les amplitudes sont OL_3 et OV_3. Enfin, lorsque l'analyseur arrive en OY parallèle au second axe de la lame, on a

$$Ov = Ol;$$

les intensités deviennent égales et le disque est uniformément éclairé. Si l'on continue la rotation, on verrait de même que la lame va en s'éclairant, le verre en s'assombrissant, et lorsque l'analyseur atteint OL_4 tangente au cercle du verre, ce dernier s'éteint. Puis la lame prendra le maximum d'éclairement lorsque l'analyseur atteindra P′, etc.

On voit qu'il y a deux positions d'égal éclairement correspondant aux moments où la section de l'analyseur se place parallèlement à l'un des axes de la lame cristalline. Si le polariseur est fixé avec $\varphi < 45°$, comme dans le cas de la figure, on a

$$Ov < OI,$$

et c'est la position OY qui donnera la pénombre dans laquelle l'éclairement uniforme sera d'autant plus petit que φ est plus petit; cet éclairement peut donc être réglé au gré de l'opérateur en fixant la section du polariseur plus ou moins près de OX.

D'ailleurs, la position OY convient mieux que OX, parce qu'en tournant tant soit peu l'analyseur à gauche ou à droite, on tombe sur les positions OV_2 ou OL_4, dans lesquelles l'un des demi-disques est complètement éteint, de sorte que la position de repère se trouve nettement délimitée.

Mesure de la rotation produite par la solution sucrée. — L'appareil étant à vide et le polariseur fixé dans la position qui donne la pénombre voulue, on tourne l'analyseur jusqu'à l'obtention de l'égal éclairement; en ce moment, la section de l'analyseur est en OY, et, si l'appareil est bien réglé, le zéro de l'alidade coïncide avec le zéro du limbe qu'elle parcourt. Après interposition du liquide sucré (fig. 20) entre le diaphragme et l'analyseur, les deux vibrations OP, OP′ qui émanent du diaphragme subissent toutes les deux une rotation de gauche à droite : c'est comme si l'analyseur avait subi une rotation en sens inverse (*); le disque s'assombrit à gauche, s'éclaircit à droite, et l'égalité de tons

(*) Pour avoir le mouvement réel, il faudrait, en *laissant fixe la section de l'analyseur,* faire tourner les deux cercles de la figure 22, d'un certain angle et de gauche à droite, autour de la normale au plan du dessin : OX vient vers la gauche, OY se relève.

disparaît; cette égalité est de nouveau obtenue lorsque la section de l'analyseur, par un mouvement dextrogyre, sera venue se placer suivant OY déplacé. L'angle lu au limbe est l'angle dont les vibrations ont tourné sous l'influence de la liqueur sucrée.

Polaristrobomètre de Wild et Polarimètre de Hofmann.

Ces saccharimètres sont basés sur le principe du polariscope de Savart. Nous n'en donnerons ici qu'une explication sommaire.

Si l'on considère un faisceau de rayons issus d'un même point très voisin d'une lame cristalline, les différents rayons parcourant des épaisseurs différentes dans des sens qui varient, le retard variera d'un point à l'autre de la face de sortie. Si l'on considère les points d'où émergent des rayons ayant un retard relatif d'un nombre entier d'ondes, nous avons vu que la vibration y est parallèle à la vibration incidente, c'est-à-dire parallèle à la section du polariseur; ces points seront donc caractérisés par ce fait que, obscurs entre les nicols croisés, ils deviennent lumineux entre nicols parallèles. L'ensemble de ces points forme des lignes qu'on a appelées d'*égal retard :* une d'elles correspond au retard T, l'autre au retard 2T, et ainsi de suite. On comprend que si de telles lignes sont produites à l'aide d'une lame cristalline placée entre deux nicols traversés par un faisceau de lumière divergente, on pourra, en tournant le polariseur, juger du moment où sa vibration est parallèle à la section de l'analyseur, par la disparition de ces lignes obscures. Que si alors on vient à interposer entre la lame et le polariseur une solution sucrée, qui en dévie la vibration, les lignes réapparaissent et on ne les verra disparaître que lorsque, par la rotation du polariseur, on aura amené la vibration qui émerge de la solution sucrée à être de nouveau parallèle à la section de l'analyseur.

Pour produire les lignes d'égal retard, Wild emploie le polariscope de Savart : deux lames de quartz de même épaisseur, taillées dans un cristal suivant la même direction, par exemple à 45° de l'axe vertical, et superposées en croisant leurs directions privilégiées de manière que l'x de l'une coïncide avec

l'y de l'autre. Dans ces conditions, on trouve que l'ensemble des points de la face de sortie pour lesquels le retard est 0, T, 2T, ..., constitue une suite de droites parallèles très rapprochées, la ligne centrale, de retard nul, étant dirigée suivant l'une des bissectrices de l'angle xy. Ces lignes, obscures entre les nicols croisés, disparaissent lorsque la section du polariseur devient parallèle à celle de l'analyseur.

Comparaison entre les différents saccharimètres.

a) L'emploi du *compensateur* exige :

1° La corrélation parfaite entre la loi réglant la rotation produite par le quartz et celle qui régit le pouvoir rotatoire de la solution à analyser, ce qui a été vérifié exact pour le saccharose, mais qui peut n'être pas vrai pour une autre substance;

2° Que l'épaisseur de quartz introduite par le compensateur sur le trajet du rayon lumineux soit bien proportionnelle à la longueur dont le biseau avance; il faut pour cela que ses faces soit planes. Cette condition doit être très difficile à remplir et la plupart des compensateurs employés ne la remplissent certainement pas.

Pour vérifier un compensateur, il faut, après avoir préparé une solution titrant 100, l'étendre de manière à obtenir des solutions devant titrer 1, 2, 3, etc., et vérifier si les indications de l'échelle du compensateur correspondent bien aux richesses saccharines.

b) L'emploi de la *lumière blanche* exige le compensateur si l'on emploie un appareil à pénombre, et une solution incolore si l'on agit par rétablissement de la teinte sensible.

c) Au contraire, les instruments qui mesurent *directement* la rotation à l'aide d'un *analyseur mobile* n'exigent que l'exactitude de la graduation du limbe, graduation qui peut être exécutée d'une manière parfaite et que d'ailleurs tout le monde peut facilement vérifier.

Il suit de là que les *instruments* vraiment *pratiques et exacts* sont les *polarimètres à pénombre éclairés par une lumière mono-*

chromatique, c'est-à-dire le polarimètre Duboscq et le polarimètre Laurent.

Quant aux instruments basés sur le polariscope de Savart, nous pensons qu'au point de vue de la sensibilité, ils doivent être inférieurs aux précédents.

NOTE.

Réflexion totale et nicol.

Considérons deux milieux transparents M et m séparés par un plan AB (fig. 23); soient V et v les vitesses de propagation de la lumière dans les deux milieux et supposons $V > v$. Lorsqu'un rayon venant du milieu M passe en m, il se rapproche de la normale NN′ au plan de séparation, et cela d'autant plus qu'il est plus rapproché de cette normale dans le premier milieu; si NOB est un faisceau lumineux, le rayon NO traverse suivant ON′, et si BO se réfracte suivant OB′, tous les rayons intermédiaires entre ON et BO viendront se réfracter entre ON′ et OB′, de sorte que le faisceau réfracté est N′OB′. Si le passage s'effectue en sens inverse, du milieu m au milieu M, dans lequel la vitesse de propagation est plus grande, le rayon s'écarte de la normale, de sorte que le faisceau B′ON′, en passant dans M, s'épanouit suivant NOB. Il suit de là que tout rayon Ox situé entre OB′ et OA ne peut traverser le plan AB pour passer dans le milieu M; on constate qu'il est réfléchi sur le plan AB suivant Ox′ et qu'il reste dans le milieu m. On conclut de ce qui précède :

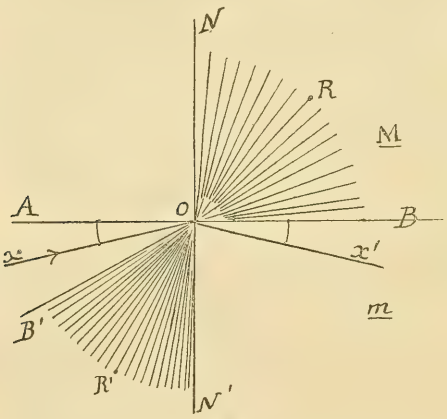


Fig. 23.

1° *Un rayon peut toujours passer d'un milieu dans un autre*

milieu dans lequel la vitesse de propagation est plus petite que dans le premier.

2° *Un rayon ne peut toujours passer d'un milieu dans un autre dans lequel la vitesse de propagation est plus grande. Il est possible d'empêcher le rayon de traverser le plan de séparation des deux milieux en lui présentant ce plan sous un angle suffisamment aigu.*

Nicol. — En prenant la vitesse de propagation dans l'air pour unité, les vitesses de propagation des rayons ordinaire et extraordinaire qui traversent le spath sont respectivement

$$v_e = 0{,}674, \qquad v_0 = 0{,}603;$$

la vitesse de propagation dans le baume de Canada, intermédiaire entre les précédentes, est

$$v_b = 0{,}646.$$

Il suit de ce qui vient d'être dit que si l'on interpose, sur le passage des deux rayons à travers le spath, une couche de baume, le rayon extraordinaire la traversera, tandis que l'ordinaire, si la couche lui est présentée sous un angle suffisamment aigu, est réfléchi sur la surface de celle-ci et rejeté intérieurement.

APPENDICE

I.

Appareil à pénombre. Estimation de la sensibilité.

Soit 2φ l'angle des vibrations émises par le binicol, α l'angle dont tourne l'analyseur à partir de la position d'égale intensité.

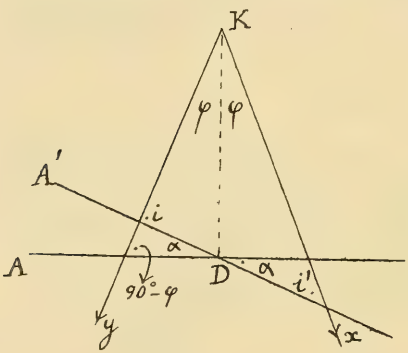


Fig. 24.

On a (fig. 24), pour les intensités d'éclairement des deux demi-champs, en désignant par a^2 l'intensité du faisceau incident,

$$I_g = a^2 \cos^2 i = a^2 \sin^2(\varphi - \alpha)$$
$$I_d = a^2 \cos^2 i' = a^2 \sin^2(\varphi + \alpha);$$

l'éclairement du champ en la position d'égale intensité, correspondant à $\alpha = 0$, est

$$I = a^2 \sin^2 \varphi.$$

En comparant la différence d'intensité à droite et à gauche correspondant à une rotation α, à l'intensité de l'éclairement uniforme, on a

$$\frac{I_d - I_g}{I} = \frac{\sin^2(\varphi + \alpha) - \sin^2(\varphi - \alpha)}{\sin^2 \varphi} = 2 \cot\varphi \sin 2\alpha.$$

On voit que ce rapport est d'autant plus grand que φ est plus petit, c'est-à-dire que pour un petit écart de l'analyseur de la position de repère, la différence entre les éclairements des deux champs, relativement à celui de la position que l'on cherche, est d'autant plus considérable que l'éclairement choisi pour la position de repère est plus faible. Ceci prouve que l'appareil est

d'autant plus sensible que l'égal éclairement choisi comme repère est plus faible. D'ordinaire, on fait $2\varphi = 5°$; pour un écart de $\frac{1}{10}$ de degré, on a

$$\frac{I_d - I_g}{I} = 2 \cot 2°30' \sin 0°12' = 0{,}1599.$$

Ainsi, pour un écart de $\frac{1}{10}$ de degré, la différence d'éclairement des deux demi-champs est d'environ *un sixième* de l'éclairement relatif à la position de repère. *On voit que ces appareils sont susceptibles d'une grande sensibilité.*

II.

Observation sur la teinte sensible; sa variabilité avec l'épaisseur de la lame.

On a appelé *teinte sensible* du blanc privé de jaune moyen. Il ne faut pas perdre de vue que cette teinte ne reste pas la même lorsque l'épaisseur de la lame, ou de la solution qui la produit, varie; en effet, dans la position où le jaune moyen est arrêté par l'analyseur, les déviations des vibrations des rayons violets et rouges augmentant avec l'épaisseur, leurs composantes suivant la section de l'analyseur varient aussi, de sorte que dans la lumière émise par ce dernier, le violet et le rouge entrent dans des proportions qui dépendent de l'épaisseur. On devrait donc dire *une teinte sensible* et pas *la teinte sensible.*

Si

$$a = 24°,5 - 17°,5 = 7°$$
$$b = 44° \quad - 24°,5 = 19°,5$$

sont les écarts respectifs de la vibration du rouge et du violet avec celle du jaune moyen, pour une lame de 1 millimètre d'épaisseur, pour une lame de n millimètres, ces écarts seront na et nb. En désignant par $\frac{a^2}{k_v}$ et $\frac{a^2}{k_r}$ les proportions de violet et de rouge qui entrent dans la composition d'un faisceau blanc d'intensité a^2, si l'analyseur est placé de manière que le jaune

est éteint, les intensités du rouge et du violet dans le faisceau transmis par l'analyseur seront (fig. 25)

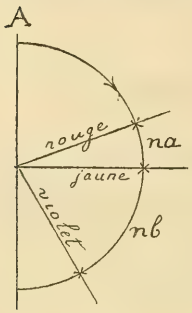


Fig. 25.

$$i_r = \frac{a^2}{k_r} \sin^2 na$$

$$i_v = \frac{a^2}{k_v} \sin^2 nb;$$

de sorte que si l'on désigne par y le rapport entre ces deux intensités et par k le même rapport relatif à la lumière blanche naturelle, on a

$$\frac{i_v}{i_r} = y = k \cdot \frac{\sin^2 nb}{\sin^2 na}.$$

On voit qu'en général y n'est pas égal à k et qu'il varie avec n, c'est-à-dire avec l'épaisseur. Ainsi, prenons pour exemple les lames d'épaisseur 3,7 et 7,4 donnant la teinte sensible, la première entre nicols parallèles, la seconde entre nicols croisés; on obtient :

$$n = 3{,}7 \qquad y = 4{,}749$$
$$n = 7{,}4 \qquad y = 0{,}7426.$$

Donc, dans la teinte sensible donnée par la première lame, la proportion entre le violet et le rouge est 4,75 fois plus grande que dans la lumière naturelle, tandis que dans la seconde elle en devient les $\frac{3}{4}$. *La lame pour laquelle le violet et le rouge seraient dans les mêmes proportions que dans la lumière naturelle* serait donnée par

$$\sin^2 nb = \sin^2 na,$$

ou, comme nb et na sont inégaux, par

$$nb + \overline{na} = 180°,$$

$$n = \frac{180}{26{,}5} = 6^{mm},8.$$

Une telle lame, placée entre un polariseur et un analyseur faisant avec lui, dans le sens de la rotation de la lame, un angle de 76°25′, donnera une teinte sensible très voisine du blanc privé du jaune moyen.

III.

Pourquoi Laurent a employé une lame demi-onde.

La théorie du saccharimètre Laurent, expliquée dans les pages précédentes par une méthode élémentaire, peut être traitée rapidement en employant les formules connues qui donnent l'intensité du faisceau lumineux ayant traversé une lame cristalline placée entre deux nicols. Ces formules montrent *qu'il n'est pas nécessaire que la lame employée soit une demi-onde,* mais *que l'emploi de la demi-onde augmente la sensibilité de l'appareil et rend symétrique le phénomène* par rapport au diamètre qui sépare le demi-disque cristallin du demi-disque vitreux.

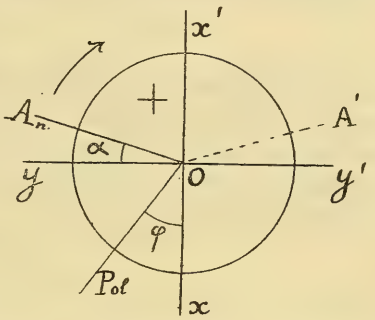


Fig. 26.

Soit φ (fig. 26) l'angle, plus petit que 45°, que le polariseur fixe fait avec l'un des axes de la lame cristalline, α l'angle que l'analyseur mobile fait avec l'autre axe. En désignant par I_c, I_v les intensités lumineuses relatives aux deux demi-disques, I_c se rapportant au côté recouvert de la lame cristalline, on a

$$I_c = a^2 \left\{ \sin^2(\alpha - \varphi) + \sin 2\varphi \sin 2\alpha \sin^2 \pi \frac{\mathcal{R}}{T} \right\} \qquad (1)$$

$$I_v = a^2 \sin^2(\alpha - \varphi),$$

formules dans lesquelles a^2 est l'intensité du faisceau qui tombe sur le polariseur, $\mathcal{R}$ le retard de la lame cristalline, T la durée d'une oscillation relative à la lumière monochromatique employée. On en déduit :

$$I_c - I_v = a^2 \sin 2\varphi \sin 2\alpha \sin^2 \pi \frac{\mathcal{R}}{T}. \qquad (2)$$

Comme sin 2φ est positif, on voit que le signe de la différence

des intensités dépend de α : lorsque l'analyseur, en tournant dans le sens de la flèche, va de Oy en Ox', on a

$$\sin 2\alpha > 0, \qquad I_e > I_v;$$

la lame cristalline sera plus éclairée que le verre; au contraire, entre Ox' et Oy',

$$\sin 2\alpha < 0, \qquad I_e < I_v.$$

Pour que les demi-disques soient également éclairés, c'est-à-dire pour que

$$I_e - I_v = 0,$$

il faut que $\sin 2\alpha = 0$, c'est-à-dire

$$\alpha = 0^\circ \qquad \text{ou} \qquad \alpha = 90^\circ.$$

L'égalité d'intensité correspond donc aux moments où l'analyseur se place parallèlement aux axes de la lame cristalline. On voit qu'*une lame quelconque peut être employée*, pourvu, bien entendu, qu'elle ne corresponde pas à un retard d'un nombre entier d'ondes, car, dans ce cas,

$$\sin^2 \pi \frac{\mathcal{R}}{T} = 0,$$

et les deux demi-disques seraient également éclairés dans n'importe quelle position de l'analyseur.

La formule (2) montre que, pour une même position de l'analyseur, la différence d'éclairement des deux demi-disques sera la plus grande possible lorsque

$$\sin^2 \pi \frac{\mathcal{R}}{T} = 1,$$

c'est-à-dire lorsque

$$\mathcal{R} = (2k + 1)\frac{T}{2}.$$

On voit que l'emploi d'une lame donnant aux rayons réfractés un retard d'un nombre impair de demi-ondes, contribue à augmenter la sensibilité de l'appareil.

Quelle que soit la lame, si, après avoir placé l'appareil au

zéro, on interpose le liquide sucré, la vibration P émergeant du verre, ainsi que les vibrations x, y émises par la lame cristalline, tournent de gauche à droite d'un angle ω; comme l'analyseur n'est plus dirigé suivant un axe de la lame, les deux demi-disques seront inégalement éclairés. Lorsque l'analyseur, par un mouvement dextrogyre d'amplitude ω, sera venu se placer suivant la nouvelle position de l'axe y, on obtiendra de nouveau l'égal éclairement.

Mais la condition que la lame donne une intensité égale à celle du verre lorsque l'analyseur coïncide avec un de ses axes n'est pas la seule qu'elle doive remplir pour le bon fonctionnement de l'appareil. Il y a deux autres conditions, dont la première essentielle :

1° Il faut que pour de petites oscillations de l'analyseur de part et d'autre de la position y d'égal éclairement, dans un sens le demi-disque cristallin aille en s'éclairant en même temps que le demi-disque vitreux s'obscurcit, tandis que l'oscillation de signe contraire doit produire le même phénomène en sens inverse. Cherchons quelles sont les lames cristallines qui remplissent cette condition.

Supposons que α varie de 0 à φ dans le sens dextrogyre; l'intensité du verre

$$I_v = a^2 \sin^2(\varphi - \alpha),$$

va en diminuant de $a^2 \sin^2\varphi$ à 0; il faut donc que I_e aille en augmentant avec α, c'est-à-dire que sa dérivée par rapport à α soit positive pour $\alpha = 0$. On a

$$I'_{e,0} = -a^2 \sin 2\varphi \cos 2\pi \frac{\mathcal{R}}{T},$$

et, comme $\sin 2\varphi$ est positif, il faut que

$$\cos 2\pi \frac{\mathcal{R}}{T} < 0,$$

ou, en ne considérant que les lames d'un retard inférieur à T,

$$\frac{T}{4} < \mathcal{R} < \frac{3T}{4}.$$

On trouverait de même que ces lames, pour une petite rota-

tion lévogyre ($\alpha < 0$), donnent une intensité décroissante au fur et à mesure que l'analyseur s'éloigne de la position y d'égal éclairement, tandis que le demi-disque vitreux s'éclaire de plus en plus. Les lames de retard $\frac{T}{4}$ et $3\frac{T}{4}$ ne répondent pas à la question, car, pour ces retards, on a

$$I'_{c,0} = 0, \qquad I''_{c,0} = 2a^2 \cos 2\varphi > 0;$$

pour ces lames l'éclairement passe par un minimum dans la position d'égal éclairement, et leur intensité va en augmentant, quel que soit le sens de l'oscillation de l'analyseur.

En résumé : a) *Toute lame cristalline donnant un retard moindre qu'une onde, placée dans le polarimètre Laurent, ne donne l'égalité d'éclairement que lorsque l'analyseur coïncide avec un des axes de la lame.* b) *Il n'y a que les lames dont le retard est compris entre un quart d'onde et trois quarts d'onde qui, pour de légères oscillations de l'analyseur autour de la position de repère, donneront des intensités variant en sens inverse de celles du disque vitreux, que l'oscillation soit dextrogyre ou lévogyre* (*).

Les diagrammes de la figure 27, dans lesquels on a supposé

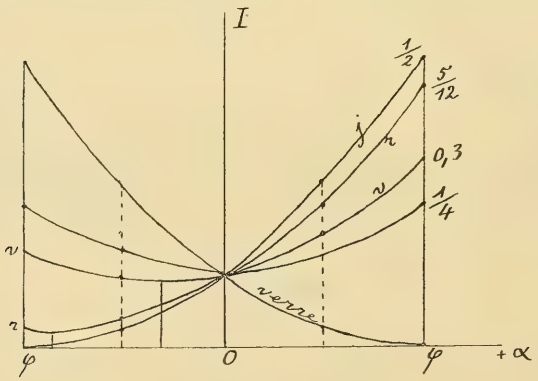


Fig. 27.

$\varphi = 10°$, montrent la variation d'intensité des deux demi-disques, pour une lame de retard donné, pendant une oscillation de l'analyseur de 0° à φ ou de 0° à $-\varphi$. Les courbes correspondant aux

(*) On va voir que cette observation est importante pour justifier l'emploi du saccharimètre Laurent en lumière blanche.

retards $R = \frac{T}{n}$ et $R = \frac{n-1}{n} T$ coïncident; ainsi, la courbe du verre correspond à $R = 0$ et $R = T$, la variation d'intensité est la même pour une lame de retard $\frac{T}{4}$ que pour une lame $3\frac{T}{4}$, etc. On voit que c'est la demi-onde qui donne la plus forte opposition.

Une seconde condition, qui, sans être indispensable, contribue au bon fonctionnement de l'appareil, est la suivante : comme le demi-disque vitreux s'éteint pour une certaine position de l'analyseur, la lame doit aussi s'éteindre par un mouvement inverse. Les diagrammes de la figure 27 montrent qu'il n'y a que la demi-onde qui remplisse cette condition entre 0 et φ. D'ailleurs il est facile de voir, en général, qu'*il n'y a que les lames ondes et demi-ondes qui puissent s'éteindre pendant la rotation de l'analyseur, lorsque le polariseur est fixé suivant une direction qui ne coïncide pas avec un axe de la lame.* En effet, si l'analyseur se trouve (fig. 26) entre y et x', $\sin 2\alpha$ est *positif*, et la valeur de I_c (form. 1) ne peut s'annuler que si l'on a simultanément

$$\sin^2(\alpha - \varphi) = 0, \qquad \sin^2 \pi \frac{\mathcal{R}}{T} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\alpha = \varphi, \qquad \mathcal{R} = kT.$$

C'est le cas des lames ondes. Si, au contraire, l'analyseur circule entre x' et y', $\sin 2\alpha$ est *négatif;* mais la formule (1) peut s'écrire

$$I_c = a^2 \left\{ \sin^2(\alpha + \varphi) - \sin 2\varphi \sin 2\alpha \cos^2 \pi \frac{\mathcal{R}}{T} \right\};$$

pour que l'intensité s'annule, il faut donc que l'on ait simultanément

$$\sin^2(\alpha + \varphi) = 0, \qquad \cos^2 \pi \frac{\mathcal{R}}{T} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\alpha = 180° - \varphi, \qquad \mathcal{R} = (2k + 1)\frac{T}{2}.$$

C'est le cas de la demi-onde, qui donne une extinction symétrique de celle du verre par rapport aux axes de la lame.

IV.

Polarimètre Laurent à lumière blanche et à compensateur.

Supposons l'*analyseur fixé* en A (fig. 28) et éclairons par la lumière blanche. Lorsque le compensateur est au zéro, si l'analyseur est fixé rigoureusement suivant un axe de la lame cristalline, les deux demi-disques seront *incolores* (*); si l'analyseur est tant soit peu trop haut à gauche de la figure, on sait que la lame prendra la teinte dite *directe*, qui est ici le *jaune-paille*, si nous supposons que la lame est une demi-onde pour le jaune moyen; au contraire, un petit écart vers le bas ferait prendre à la lame la couleur *complémentaire, violet très sombre*. La bonne orientation exige donc qu'en lumière blanche *et le compensateur étant au zéro*, la *teinte* de la position *d'égale intensité* soit le *blanc*. L'interposition de la solution sucrée fera dévier la vibration émanant du verre, ainsi que les vibrations x, y émises par la lame cristalline; les intensités et les colorations des deux demi-disques changeront (voir p. 27, 3° exemple), mais l'introduction du compensateur ramènera le

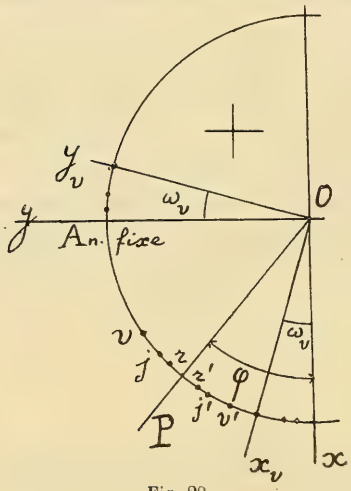


Fig. 28.

(*) Ceci se déduit de la formule (1) appliquée aux différents faisceaux monochromatiques qui composent le faisceau blanc. En général, à cause du second terme, les intensités des différents faisceaux élémentaires, à la sortie de l'analyseur, ne sont plus dans le même rapport que dans la lumière blanche, c'est ce qui cause la *polarisation chromatique* ; mais, lorsque l'analyseur coïncide avec un axe de la lame, $\sin 2\alpha = 0$ et la formule se réduit à son premier terme; dans ce cas, les intensités respectives des faisceaux monochromatiques sont, après passage à travers l'analyseur, multipliées par le facteur constant $\sin^2(\alpha - \varphi)$ et, par conséquent, conservent les mêmes rapports qu'à l'incidence.

tout dans sa position initiale, donc dans la position où les deux demi-champs sont incolores et également éclairés.

Il s'agit à présent d'examiner si les deux conditions de sensibilité remplies par l'instrument en lumière monochromatique sont ici observées. Et en premier lieu : un petit mouvement du compensateur à partir du zéro fait-il varier en sens inverse l'intensité des deux demi-disques, et cela quel que soit le sens du mouvement? Il ne faut pas perdre de vue que la lame demi-onde pour le jaune moyen n'est pas une demi-onde pour le violet et pour le rouge, et l'on pourrait craindre une perturbation dans le sens de la variation de l'intensité. On a

$$\frac{1}{2}T_j = 0{,}7T_v = 0{,}44T_r;$$

la lame se trouve donc comprise entre $\frac{1}{4}$ *et* $\frac{3}{4}$ *d'onde pour les couleurs extrêmes et, par conséquent, pour toutes les couleurs intermédiaires;* d'après ce qui a été dit précédemment (*), *les intensités de tous les faisceaux élémentaires et, par conséquent, l'intensité totale varieront dans le sens voulu.*

Voyons, en second lieu, si l'introduction d'une petite épaisseur de quartz, faite par le compensateur, produit des phénomènes symétriques suivant que le quartz est dextrogyre ou lévogyre. La valeur de φ, qui préside à la décomposition suivant les axes de la lame, ne change pas; la rotation fait arriver les vibrations x, y tournées de ω par rapport à l'analyseur, de sorte que l'on a pour les intensités des différents faisceaux monochromatiques, en supposant la rotation dextrogyre,

$$i_v = \frac{a^2}{n_v}\left\{\sin^2(\varphi - \omega_v) + \sin 2\varphi \sin 2\omega_v \cos^2 \pi \frac{\mathcal{R}}{T_v}\right\},$$

$$i_j = \frac{a^2}{n_j}\left\{\sin^2(\varphi - \omega_j) + \sin 2\varphi \sin 2\omega_j \cos^2 \pi \frac{\mathcal{R}}{T_j}\right\},$$

$$i_r = \frac{a^2}{n_r}\left\{\sin^2(\varphi - \omega_r) + \sin 2\varphi \sin 2\omega_r \cos^2 \pi \frac{\mathcal{R}}{T_r}\right\}.$$

Dans ces formules, $\frac{a^2}{n_v}$, $\frac{a^2}{n_j}$, $\frac{a^2}{n_r}$ représentent les proportions respectives de violet, jaune et rouge qui entrent dans le faisceau

(*) Voir page 48.

blanc incident d'intensité a^2. Représentons par V, J, R les rapports entre les proportions de ces mêmes couleurs contenues dans le faisceau émergent et celles que renferme le faisceau incident (*). Comme nous supposons ω très petit, remplaçons dans les formules ci-dessus $\sin k\omega$ par $k \sin \omega$; on a, en outre,

$$T_v = 59{,}3 \qquad T_j = 55{,}1 \qquad T_r = 62{,}8$$
$$\mathfrak{R} = 27{,}55 \qquad \omega_r = 0{,}714\omega_j \qquad \omega_v = 1{,}796\omega_j;$$

il vient

$$\begin{aligned} V &= \sin^2(\varphi - \omega_v) + 1{,}2547 \sin 2\varphi \sin \omega_j \\ J &= \sin^2(\varphi - \omega_j) \\ R &= \sin^2(\varphi - \omega_r) + 0{,}0523 \sin 2\varphi \sin \omega_j. \end{aligned} \tag{3}$$

On a d'abord $R > J$; en outre,

$$V - R = 1{,}2024 \sin 2\varphi \sin \omega_j - \sin(2\varphi - \omega_v - \omega_r) \sin(\omega_v - \omega_r),$$

et comme, d'après l'hypothèse faite sur ω, on peut écrire

$$\frac{\sin(\omega_v - \omega_r)}{\sin \omega_j} = \frac{\omega_v - \omega_r}{\omega_j} = 1{,}082,$$

$$V - R = 1{,}082 \sin \omega_j \{1{,}1 \sin 2\varphi - \sin(2\varphi - \omega_v - \omega_r)\}.$$

Le second membre est essentiellement positif, vu que $\varphi < 45°$ et, par conséquent, $V > R$, de sorte que la teinte du demi-disque portant la lame cristalline peut être représentée par VRJ, en commençant le symbole par la couleur prédominante et le finissant par celle dont la proportion est la plus faible. Quant aux vibrations OP émanant du verre, elles viendront en r, j, v, et la teinte du demi-disque vitreux sera représentée par VJR.

Si le compensateur se meut en sens inverse, on obtient les proportions des différentes couleurs dans le faisceau relatif à la lame cristalline, en remplaçant ω par $-\omega$ dans les formules précédentes; on voit immédiatement que $J > R$; en outre

$$V - R = 1{,}082 \sin \omega_j \{\sin(2\varphi + \omega_v + \omega_r) - 1{,}1 \sin 2\varphi\}.$$

On voit que pour des valeurs de $\omega_v + \omega_r$ très voisines de zéro, le second membre est négatif, et l'on a $R > V$, de sorte que la teinte du demi-disque cristallin sera représentée par JRV. Pour

(*) $V = i_v : \frac{a^2}{n_v}$.

le demi-disque vitreux, les vibrations venant en r', j', v', la teinte sera RJV. En résumé, dans le voisinage immédiat du zéro, les teintes relatives des deux demi-disques seront

	LAME CRIST.	VERRE.
Introduction de quartz dextrogyre . .	V R J	V J R
Id. id. lévogyre . . .	J R V	R J V

On en conclut que *les teintes ne varient pas symétriquement lorsque le compensateur oscille de part et d'autre du zéro.*

Il est probable que c'est *pour éviter cet inconvénient* que Laurent fait passer la lumière blanche à travers une *solution de bichromate de potassium*, qui rend les colorations plus uniformes en absorbant les vibrations violettes et bleues ; en effet, les teintes des deux demi-disques deviennent alors RJ, JR pour l'introduction dextrogyre et JR, RJ pour l'introduction lévogyre. Un exemple fera mieux ressortir l'utilité de la solution de bichromate : supposons le polariseur fixé avec $\varphi = 10°$, et manœuvrons le compensateur, à partir du zéro, de manière à obtenir, dans le sens dextrogyre, puis dans le lévogyre, une déviation d'un demi-degré pour le jaune moyen, c'est-à-dire faisons

$$\omega_v = 0°53'53'' \qquad \omega_j = 0°30' \qquad \omega_r = 0°21'25''.$$

Les formules (3) donnent les résultats suivants, dans lesquels les valeurs de V, J, R représentent des millièmes (*) :

$\varphi = 10°$	$\omega_j = +\ 0°30'$		$\omega_j = -\ 0°30'$	
	CRISTAL.	VERRE.	CRISTAL.	VERRE.
V =	28,8	35,7	32	25
J =	27,2	33,2	33,2	27,2
R =	28,2	32,3	32,2	28,1

(*) Ainsi V = 32 signifie que dans le faisceau émis par la lame cristalline, au sortir de l'analyseur, il subsiste les 32 millièmes du faisceau violet que le polariseur a lancé sur la lame cristalline.

On voit que la symétrie, qui est naturellement parfaite pour le jaune vu que la lame est une demi-onde pour cette couleur, l'est aussi sensiblement pour le rouge, de sorte qu'il suffira d'intercepter les rayons violets et bleus pour donner à l'appareil un fonctionnement symétrique dans la recherche de la position de repère.

La formule qui donne V — R pour une introduction lévogyre prouve, comme nous l'avons dit ci-dessus, que pour de très petites valeurs de ω, on a $R > V$; mais si l'on continue à faire avancer le compensateur, $\sin(2\varphi + \omega_v + \omega_r)$ augmente et à un moment donné atteint 1,1 $\sin 2\varphi$, si toutefois 1,1 $\sin 2\varphi < 1$, c'est-à dire si le polariseur est fixé sous un angle $\varphi < 32°41',5$. Lorsque cette dernière condition est remplie, à un moment donné $R = V$, puis c'est le violet qui l'emporte proportionnellement sur le rouge. Le changement de signe de V — R a lieu pour une petite valeur de ω, comme l'indique le tableau suivant :

φ	ω_j	φ	ω_j
5°	0°24′	30°	4°54′
10°	0°50′	32°41′,5	9°48′,5
20°	2°		

Si φ est plus grand que 32°41′,5, il n'y a pas de changement et V — R reste négatif

Observons, pour finir, que ces propriétés auraient pu être déduites, au moins partiellement, de l'examen des courbes de la figure 27. Il faut y supposer $\alpha = -\omega$ parce qu'ici l'analyseur est fixe et qu'une rotation dextrogyre produite par le compensateur revient à une rotation lévogyre de l'analyseur. La variation de J, correspondant à 0,5 T_j, est représentée par la courbe supérieure j; celle de R, qui correspond à 0,44 T_r, est donc indiquée par une courbe voisine, un peu inférieure (*); celle

(*) La courbe marquée r correspond à

$$\pi \frac{R}{T} = 75°, \text{ c'est-à-dire à } \frac{R}{T} = \frac{5}{12} = 0{,}42;$$

la courbe du rouge, dans la question actuelle, est donc intermédiaire entre j et r, c'est-à-dire encore plus rapprochée de j que la courbe marquée r.

de V, qui est relative au retard 0,7 T_v ou 0,5 T_v, par une courbe v un peu supérieure à celle qui correspond au quart d'onde. On voit qu'une abscisse quelconque à gauche, correspondant à une rotation dextrogyre, donne des ordonnées $V > R > J$, tandis qu'à droite on a $J > R > V$. Si, au lieu de considérer les trois ordonnées qui correspondent à une même abscisse, on considère celles relatives aux abscisses ω_j, $\omega_r = 0{,}7\ \omega_j$ et $\omega_v = 1{,}8\ \omega_j$, l'allure des courbes montre que la propriété subsiste à gauche, mais à droite, elle n'est évidente que si les trois ordonnées consécutives sont très voisines, ce qui exige que ω_j soit très petit.

GÉNÉRALISATION

DES

FORMULES D'EULER

PAR

G. CESÀRO

CORRESPONDANT DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

GÉNÉRALISATION

DES

FORMULES D'EULER

Euler a donné des formules permettant de passer d'un système d'axes rectangulaires à un autre système d'axes également rectangulaires, dont la position est déterminée par rapport à l'ancien système par trois données : l'angle zz' et les angles que l'intersection des plans xy, $x'y'$ fait respectivement avec les axes x et x'.

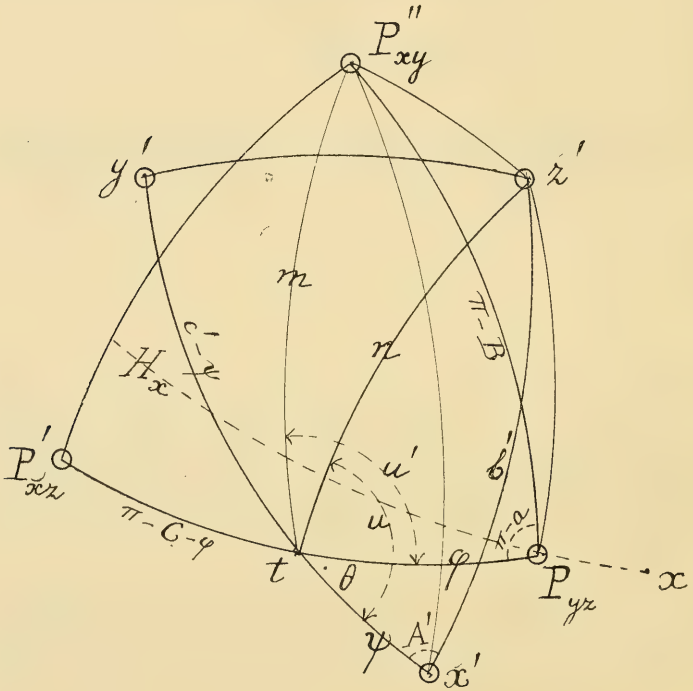
Je vais établir dans cette note des formules analogues se rapportant au cas où les deux trièdres axiaux sont quelconques.

De l'origine commune aux deux systèmes comme centre décrivons une sphère de rayon quelconque, et soient x', y', z' les points où les nouveaux axes percent cette sphère, P_{yz}, P'_{zz}, P''_{xy} les points de percée des perpendiculaires menées par l'origine aux anciens plans coordonnés.

Si t est l'intersection (*) des plans $x'y'$, PP', nous nous donnons le nouveau système par rapport à l'ancien par les

(*) Pour abréger, nous désignons une droite par le point où elle perce la sphère considérée.

angles φ, ψ que cette intersection fait respectivement avec P et x' et par l'angle θ que le plan $x'y'$ fait avec le plan PP′; il est facile de voir que ces trois angles déterminent la position relative des deux trièdres axiaux. Quant à ces trièdres eux-mêmes, ils seront donnés chacun par trois éléments : les faces de l'ancien trièdre



axial seront désignées par a, b, c, les dièdres opposés par A, B, C; les mêmes lettres accentuées représenteront les éléments analogues du nouveau système. Nous nous donnons le nouveau trièdre par b', c', A′, l'ancien par B, C, a, éléments analogues des premiers dans le triangle PP′P″.

Projetons sur la droite P_{yz} les deux contours polygonaux formés dans l'espace respectivement par les coordonnées xyz, $x'y'z'$ d'un même point; en observant que les projections de y et z sont nulles, vu que P est le pôle du plan yz, et que l'angle

fait par x avec P est le complément d'une hauteur H_x du triangle $PP'P''$, on obtient

$$x \sin H_x = x' \cos Px' + y' \cos Py' + z' \cos Pz'; \qquad (1)$$

les mêmes contours projetés sur P' et sur P'' donnent de même

$$y \sin H_y = x' \cos P'x' + y' \cos P'y' + z' \cos P'z'$$
$$z \sin H_z = x' \cos P''x' + y' \cos P''y' + z' \cos P''z'.$$

Il reste à calculer les neuf coefficients : cos Px', cos Py', etc., en fonction des données (*).

* * *

Les angles Px', Py', $P'x'$, $P'y'$ se calculent immédiatement dans les triangles sphériques ayant ces inconnues pour bases et le point t pour sommet : on a, par exemple,

$$\cos Py' = \cos\varphi \cos(c' - \psi) - \sin\varphi \sin(c' - \psi) \cos\theta.$$

* * *

Les angles Pz', $P'z'$, $P''x'$, $P''y'$ se calculent d'une façon uniforme en opérant comme il suit :

Calcul de Pz'. — Dans le triangle $Pz't$, dont le côté tz' sera désigné par n, on a

$$\cos Pz' = \cos\varphi\cos n + \sin\varphi \sin n \cos(u - \theta)$$
$$= \cos\varphi\cos n + \sin\varphi(\sin n \cos u \,.\, \cos\theta + \sin n \sin u \,.\, \sin\theta);$$

(*) Quant à H_x, H_y, H_z, elles se déduisent des données déterminant l'ancien trièdre axial ; ainsi, dans notre cas,

$$\sin H_z = \sin B \sin a, \quad \sin H_y = \sin C \sin a,$$

$$\frac{1}{\sin H_x} = \frac{1}{\sin a \sin B \sin C}\sqrt{\sin^2 B\cos^2 C + \sin^2 C\cos^2 B + \sin^2 B\sin^2 C\sin^2 a + 2\sin B\sin C\cos B\cos C\cos a.}$$

le triangle $x'z't$ donne immédiatement $\cos n$ et

$$\sin n \sin u = \sin b' \sin A'; \tag{2}$$

quant à $\sin n \cos u$, on l'obtient rapidement en appliquant au même triangle la formule connue

$$\sin c \cos A = \cos a \sin b - \cos b \sin a \cos C,$$

qui donne

$$\sin n \cos u = \cos b' \sin \psi - \cos \psi \sin b' \cos A' \tag{3}$$

de sorte que

$$\cos Pz' = \cos \varphi (\cos b' \cos \psi + \sin b' \sin \psi \cos A')$$
$$+ \sin \varphi \cos \theta (\cos b' \sin \psi - \sin b' \cos \psi \cos A') + \sin \varphi \sin \theta \sin b' \sin A'.$$

Calcul de $P''x'$. — Par l'emploi des triangles $P''x't$ et $PP''t$, on obtient comme ci-dessus, en désignant $P''t$ par m,

$$\sin m \sin u' = \sin B \sin a, \tag{4}$$

$$\sin m \cos u' = - \cos B \sin \varphi + \cos \varphi \sin B \cos a, \tag{5}$$

$$\cos P''x' = - \cos \psi (\cos \varphi \cos B + \sin \varphi \sin B \cos a)$$
$$+ \sin \psi \cos \theta (- \cos B \sin \varphi + \cos \varphi \sin B \cos a) - \sin \psi \sin \theta \sin B \sin a.$$

* * *

La valeur de $P''z'$ est plus complexe.
Le triangle $P''z't$ donne

$$\cos P''z' = \cos m \cos n + \sin m \sin n \cos (u' + \theta - u)$$
$$= \cos m \cos n + \cos \theta \,.\, \sin m \cos u' \,.\, \sin n \cos u$$
$$+ \sin \theta \,.\, \sin m \cos u' \,.\, \sin n \sin u - \sin \theta \,.\, \sin n \cos u \;\; \sin m \sin u'$$
$$+ \cos \theta \,.\, \sin m \sin u' \,.\, \sin n \sin u;$$

puis, à l'aide des relations (2), (3), (4) et (5),

$$\begin{aligned}\cos P''z' = &- (\cos b' \cos\psi + \sin b' \sin\psi \cos A')(\cos\varphi \cos B + \sin\varphi \sin B \cos a)\\ &+ \cos\theta\{(\cos b' \sin\psi - \sin b' \cos\psi \cos A')(-\cos B \sin\varphi + \cos\varphi \sin B \cos a) + \sin b' \sin a \sin A' \sin B\}\\ &+ \sin\theta\{\sin b' \sin A'(-\cos B \sin\varphi + \cos\varphi \sin B \cos a) - \sin B \sin a (\cos b' \sin\psi - \cos\psi \sin b' \cos A')\}.\end{aligned}$$

* * *

En remplaçant les neuf coefficients par leurs valeurs dans les relations (1), on obtient les formules demandées :

$$\begin{aligned}x \sin H_x = &\quad x'\{\cos\varphi \cos\psi + \sin\varphi \sin\psi \cos\theta) + y'\}\cos\varphi \cos(c' - \psi) - \sin\varphi \sin(c' - \psi)\cos\theta\}\\ &+ z'\{\cos\varphi (\cos b' \cos\psi + \sin b' \sin\psi \cos A') + \sin\varphi \cos\theta (\cos b' \sin\psi - \sin b' \cos\psi \cos A') + \sin\varphi \sin\theta \sin b' \sin A'\}\\ y \sin H_y = &- x'\{\cos\psi \cos(C + \varphi) + \sin\psi \sin(C + \varphi)\cos\theta\} - y'\{\cos(c' - \psi)\cos(C + \varphi) - \sin(c' - \psi)\sin(C + \varphi)\cos\theta\}\\ &- z'\{\cos(C + \varphi)(\cos b' \cos\psi + \sin b' \sin\psi \cos A') + \sin(C + \varphi)\cos\theta(\cos b' \sin\psi - \sin b' \cos\psi \cos A') + \sin(C + \varphi)\sin\theta \sin b' \sin A'\}\\ z \sin H_z = &- x'\{\cos\psi (\cos\varphi \cos B + \sin\varphi \sin B \cos a) + \sin\psi \cos\theta (\cos B \sin\varphi - \cos\varphi \sin B \cos a) + \sin\psi \sin\theta \sin B \sin a\}\\ &- y'\{\cos(c' - \psi)(\cos\varphi \cos B + \sin\varphi \sin B \cos a) - \sin(c' - \psi)\cos\theta(\cos B \sin\varphi - \cos\varphi \sin B \cos a) - \sin(c' - \psi)\sin\theta \sin B \sin a\}\\ &- z'\left[\begin{array}{l}(\cos b' \cos\psi + \sin b' \sin\psi \cos A')(\cos\varphi \cos B + \sin\varphi \sin B \cos a)\\ + \cos\theta\{(\cos b' \sin\psi - \cos\psi \sin b' \cos A')(\cos B \sin\varphi - \sin B \cos\varphi \cos a) - \sin b' \sin A' \sin B \sin a\}\\ + \sin\theta\{\sin b' \sin A'(\cos B \sin\varphi - \cos\varphi \sin B \cos a) + \sin B \sin a (\cos b' \sin\psi - \cos\psi \sin b' \cos A')\}\end{array}\right].\end{aligned}$$

*
* *

Cas particuliers. — *a*) Les formules ne se simplifient guère dans le cas où les deux systèmes d'axes sont égaux; si ces systèmes sont rectangulaires, P, P′ et P″ sont les points d'intersection des anciens axes avec la sphère, de sorte que φ, ψ, θ prennent la même signification qu'on leur attribue dans les formules d'Euler; on obtiendra donc ces dernières en remplaçant dans nos formules b', c', A′, B, C, a, H_x, H_y et H_z par 90°.

b) Prenons pour nouveaux axes les perpendiculaires menées par l'origine aux anciens plans coordonnés; dans ce cas, le triangle $x'y'z'$ coïncide avec PP′P″. Pour appliquer nos formules, prenons le point t arbitrairement, faisons $\psi = \varphi$, puis, en faisant décroître θ jusqu'à 0, amenons les deux triangles en coïncidence par une rotation donnée à $x'y'z'$ autour de t. Il faudra faire

$$b' = 180° - B, \quad c' = 180° - C, \quad A' = 180° - a,$$
$$\psi = \varphi, \quad \theta = 0.$$

On obtient

$$x \sin H_x = x' - y' \cos C - z' \cos B$$
$$y \sin H_y = - x' \cos C + y' - z' \cos A$$
$$z \sin H_z = - x' \cos B - y' \cos A + z',$$

formules évidentes à l'inspection de la figure.

LES

FIGURES SIMILAIRES

DANS

LE PLAN ET DANS L'ESPACE

PAR

G. TARRY

à Alger.

LES

FIGURES SIMILAIRES

DANS

LE PLAN ET DANS L'ESPACE

1. J'appelle *figures similaires* dans le plan deux figures φ_1 et φ_2, dans lesquelles à des points a_1 de la première correspondent des points a_2 de la seconde, de manière que dans le carré $a_1a_3a_2a_4$, construit sur a_1a_2 comme diagonale, les sommets a_3 et a_4 de l'autre diagonale soient des points homologues de deux figures inversement semblables, φ_3 et φ_4.

Pour préciser, j'ajouterai qu'un mobile qui parcourt le périmètre de ce carré dans le sens déterminé du mouvement des aiguilles d'une montre, rencontre les sommets dans l'ordre circulaire $a_1a_3a_2a_4$.

Je donnerai le nom de *points inséparables,* à deux points homologues de deux figures similaires, et je désignerai les points inséparables, dans l'écriture, en les réunissant par un trait d'union.

J'appellerai *caractéristique,* la racine carrée du rapport de similitude des figures inversement semblables φ_3 et φ_4, associées au couple de figures similaires $\varphi_1 — \varphi_2$. C'est la racine carrée du rapport, et non le rapport lui-même, qu'il sera très important de connaître dans les applications.

Si k est la caractéristique du couple $\varphi_1 — \varphi_2$, $\frac{1}{k}$ sera la caractéristique du couple conjugué $\varphi_2 — \varphi_1$. La caractéristique peut être égale à zéro ou à l'infini, et dans ce cas l'une des figures associées se réduit à un point.

On sait que si deux points d'une figure semblablement variable parcourent simultanément des lignes affines, de manière à

se trouver, à tout instant, en des points homologues de ces lignes, tous les points de la figure décrivent des lignes affines ou des droites. Or, dans le carré $a_1a_3a_2a_4$, figure semblablement variable, les points a_3 et a_4 décrivent des figures inversement semblables, cas particulier de figures affines.

Donc, les points inséparables $a_1 - a_2$ décrivent des figures affines, qui peuvent se réduire à des droites.

2. Théorème. — Deux figures similaires sont deux figures affines, qui se réduisent à deux droites parallèles, séparées ou superposées, dans le cas particulier où la caractéristique est égale à l'unité.

En d'autres termes, on a cette propriété connue :

Si deux sommets opposés d'un carré de grandeur variable décrivent des figures inversement égales, les deux autres sommets glissent sur deux droites parallèles, et réciproquement.

3. Théorème. — Un système de figures similaires est toujours déterminé par deux couples d'inséparables, $a_1 - a_2$ et $b_1 - b_2$.

Cela résulte immédiatement de la détermination des deux figures inversement semblables associées au système.

Nous distinguerons trois cas :

1° Les droites a_1b_1 et a_2b_2 sont concourantes.

La caractéristique est différente de l'unité, et les deux figures similaires sont affines.

Le système similaire est dit *radié*.

2° Les droites a_1b_1 et a_2b_2 sont parallèles.

La caractéristique est égale à l'unité, et les deux figures similaires se réduisent à deux droites parallèles.

Le système est dit *disjoint*.

3° Les droites a_1b_1 et a_2b_2 se confondent.

La caractéristique est égale à l'unité, et le système, composé de deux droites superposées, est dit *conjoint*.

4. Deux figures similaires ont un point double, que nous appellerons *centre*.

Le centre est évidemment le point double des figures associées au système.

Joignons le centre o à deux points homologues, a_3 et a_4, des figures associées, φ_3 et φ_4. La bissectrice de l'angle a_3oa_4 est une droite fixe, que nous appellerons *grand axe.*

La perpendiculaire au grand axe menée par le centre sera le *petit axe.*

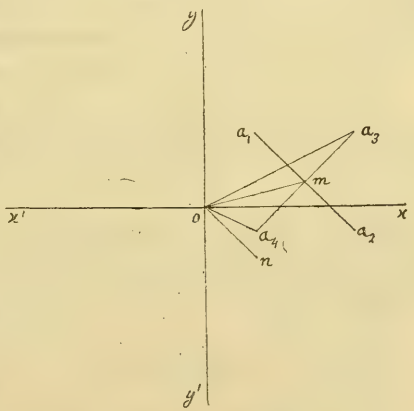
Lorsque la caractéristique est égale à zéro ou à l'infini, l'une des figures associées, φ_3 ou φ_4, se réduit à un point qui se confond avec le centre. Dans ce cas particulier important, les figures similaires deviennent des figures égales, qui peuvent être amenées l'une sur l'autre par une rotation d'un angle droit autour du centre.

Nous appellerons système *isotrope,* positif ou négatif, le système de deux figures similaires qui a pour caractéristique zéro ou l'infini.

Si le couple $\varphi_1 - \varphi_2$ est isotrope positif ou négatif, le groupe conjugué $\varphi_2 - \varphi_1$ est isotrope de nom contraire.

Quand les figures similaires se réduisent à deux droites parallèles, on peut considérer comme grand axe la droite équidistante de ces deux parallèles, et comme petit axe la droite à l'infini; le centre est alors le point à l'infini sur le grand axe.

5. Théorème. — Deux points inséparables $a_1 - a_2$ sont les extrémités de deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse semblablement variable, qui a pour grand axe et petit axe le grand axe et petit axe des deux figures similaires.



Le rapport du petit axe au grand axe est égal à $\pm\frac{1-k^2}{1+k^2}$, k étant la caractéristique.

Soient a_3 et a_4 les points correspondant dans les figures associées aux points inséparables $a_1 - a_2$, o le centre du système et m le centre du carré $a_1a_3a_2a_4$.

Par le centre o, menons une droite on égale et parallèle à ma_1 ou ma_2, et considérons om et on comme deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse.

D'après la célèbre construction de Chasles (sections coniques, p. 132), le grand axe de cette ellipse est la bissectrice de l'angle a_3oa_4, le petit axe est la bissectrice du supplément de cet angle, les grandeurs des deux axes ont pour expression

$$oa_3 + oa_4 \quad \text{et} \quad oa_3 - oa_4,$$

et, par conséquent, le rapport du petit axe au grand axe est égal à

$$\frac{1 - \dfrac{oa_4}{oa_3}}{1 + \dfrac{oa_4}{oa_3}} = \frac{1 - k^2}{1 + k^2}.$$

D'autre part, on voit que a_1a_2 est le côté d'un parallélogramme circonscrit à cette ellipse et que, par suite, oa_1 et oa_2 sont deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse concentrique et homothétique à la précédente.

Le théorème est donc démontré.

Dans le cas où les figures similaires sont isotropes, l'ellipse devient une circonférence, et les points inséparables sont les extrémités de deux rayons rectangulaires.

De ce qui précède, on déduit les propriétés suivantes :

Les couples d'inséparables de deux figures similaires se répartissent sur une infinité d'ellipses concentriques et homothétiques, et si un point de l'une des figures similaires parcourt une de ces ellipses, son inséparable parcourra la même ellipse dans le même sens, de telle sorte qu'à tout instant les inséparables seront aux extrémités de deux demi-diamètres conjugués.

Réciproquement, si à un point quelconque a_1 on fait correspondre un point a_2 déterminé par la double condition que oa_1 et oa_2 soient deux demi-diamètres conjugués d'une même ellipse et que l'angle a_1oa_2, compris entre $+\pi$ et $-\pi$, soit toujours de même signe, a_2 sera l'inséparable de a_1 dans un système de deux figures similaires, et l'on obtiendra tous les couples d'inséparables

du système en remplaçant cette ellipse par toutes celles qui lui sont concentriques et homothétiques.

6. Théorème. — La projection cylindrique d'un couple de figures similaires sur un plan est un autre couple de figures similaires.

Cela résulte immédiatement de ce qu'une ellipse et deux diamètres conjugués se projettent suivant une ellipse et deux diamètres conjugués.

La proposition est évidente quand les deux figures similaires sont disjointes ou conjointes.

Cette belle propriété rend attrayante l'étude des figures similaires.

7. Théorème. — Deux figures similaires radiées peuvent toujours être projetées cylindriquement sur un plan, suivant deux figures isotropes.

C'est une conséquence évidente de la propriété de l'ellipse de pouvoir être projetée suivant une circonférence.

Corollaire. — Deux courbes homologues de deux figures similaires ont la même aire.

En effet, elles peuvent être projetées sur un plan suivant deux courbes homologues de deux figures isotropes. Or, dans deux figures isotropes, les courbes homologues ont la même aire, puisqu'elles peuvent être amenées l'une sur l'autre par une rotation d'un angle droit autour du centre, donc, etc.

8. Deux figures similaires possèdent toutes les propriétés de deux figures homographiques, puisqu'elles en sont un cas particulier.

Ainsi, les points de l'une des figures qui, avec leurs homologues de la seconde figure, sont alignés sur un point fixe, sont situés sur une même conique qui passe par le point fixe et par les points doubles des deux figures.

Pour les figures similaires, ces coniques sont des ellipses semblables qui passent par le centre et le point fixe, et corrélativement, les droites de l'une des figures qui rencontrent leurs homologues sur une droite fixe, enveloppent une autre conique

qui est tangente à la droite fixe et aux droites doubles des deux figures.

Pour les figures similaires, ces coniques sont des paraboles tangentes à la droite fixe et à deux droites imaginaires conjuguées passant par le centre.

Ces propriétés sont utilisables par la méthode de généralisation, qui consiste à considérer une figure comme un cas particulier d'une autre plus générale, et à appliquer au cas particulier les propriétés démontrées pour le cas général.

Comme exemple d'application de cette méthode, je citerai le théorème suivant, dont la démonstration géométrique n'a pu être obtenue, qu'en considérant deux figures inversement semblables comme un cas particulier de deux figures homographiques.

L'axe d'homologie d'un triangle ABC et de son triangle de Brocard $A_1B_1C_1$ est perpendiculaire à la droite ON, qui passe par le centre O du cercle circonscrit et le point de Tarry N du triangle ABC (*Mathesis*, 1895, p. 5).

9. Théorème. — Sur chaque droite du plan d'un système de figures similaires $\varphi_1 - \varphi_2$ se trouve toujours un couple d'inséparables et un seul.

La proposition revient à démontrer que dans les figures associées φ_3 et φ_4, il existe un couple de points homologues et un seul, symétriques par rapport à une droite donnée, ou encore que la figure φ_3 et la figure φ'_4, symétrique de φ_4 par rapport à la droite donnée, ont un point double et un seul.

On voit immédiatement que les figures φ_3 et φ'_4, directement semblables, ont toujours un point double quand la caractéristique est différente de l'unité.

Quand la caractéristique est égale à l'unité, les deux figures similaires se réduisent à deux droites parallèles, et sur toute droite se trouve encore un couple d'inséparables, même lorsque la droite est parallèle au grand axe, puisque cette droite passe alors par le point double des deux figures similaires, situé à l'infini sur le grand axe.

Il n'y a d'exception que dans le seul cas où la droite du plan se confond avec les deux droites superposées d'un système conjoint.

10. Soient $a_1 - a_2$ deux points inséparables et m le milieu de a_1a_2.

Nous dirons que deux points p et q de la droite a_1a_2 sont *conjugués harmoniques* par rapport au couple $a_1 - a_2$, lorsqu'on aura la relation $mp \,.\, mq = ma_1 \,.\, ma_2$.

Autrement, le conjugué harmonique du point p, par rapport au couple d'inséparables $a_1 - a_2$, sera par définition le symétrique, par rapport au milieu m de a_1a_2, du conjugué harmonique de p, par rapport au couple des points inséparables $a_1 - a_2$, considérés comme des points ordinaires.

Théorème. — Si, par un point p pris dans le plan de deux figures similaires, on mène une sécante quelconque pa_1a_2, et qu'on détermine le conjugué harmonique q du point p, par rapport au couple d'inséparables situés sur cette sécante, le lieu géométrique du point q, lorsque la sécante tourne autour du point p, est une droite qui passe par le centre o du système.

La proposition est évidente pour les systèmes disjoints et conjoints.

Pour le système isotrope, on voit aisément que le lieu du point q est la perpendiculaire à op menée par le point o.

La relation $mp \,.\, mq = ma_1 \,.\, ma_2$ se conservant dans la projection cylindrique, et tout système radié pouvant être projeté suivant un système isotrope, le théorème se trouve aussi démontré pour le cas général.

Le point p est le pôle de la droite oq, et la droite oq est la polaire du point p.

Il est clair que tous les points d'un diamètre op ont la même polaire oq, et que tous les points du diamètre oq ont pour polaire op.

op et oq sont donc deux diamètres conjugués du système.

Les droites qui joignent le centre à deux points inséparables sont deux diamètres conjugués.

Les diamètres conjugués du système sont aussi les diamètres conjugués des ellipses concentriques et homothétiques, sur lesquelles se répartissent les couples d'inséparables.

11. Théorème. — Deux systèmes similaires ont un couple commun d'inséparables ou n'en ont aucun.

Nous dirons que deux systèmes sont *parallèles* lorsqu'ils n'auront aucun couple commun d'inséparables.

Examinons tous les cas qui peuvent se présenter :

1° Les deux systèmes sont disjoints ou conjoints, et par conséquent se réduisent à deux couples de droites parallèles, A, A′ et B, B′, séparées ou superposées.

On voit immédiatement que les points d'intersection AB et A′B′, des couples de droites A, B et A′, B′ forment le couple commun de points invariables.

Les deux systèmes ont même caractéristique, l'unité, et ne sont parallèles que dans le cas où leurs grands axes sont parallèles.

2° Un système est disjoint ou conjoint, et l'autre est isotrope.

Les deux systèmes ont des caractéristiques différentes et ne sont jamais parallèles.

Le couple commun $a_1 - a_2$ appartient à un carré $a_1a_3a_2a_4$ que l'on sait construire, puisque le centre du système isotrope est le point a_3 ou le point a_4, suivant que le système est isotrope positif ou isotrope négatif, et les points a_1 et a_2 sont sur deux droites données.

3° Un système est disjoint ou conjoint, et l'autre est radié.

Ce cas se ramène au précédent par projection cylindrique, et l'on voit que les deux systèmes, qui ont des caractéristiques différentes, ne sont jamais parallèles.

4° Les deux systèmes sont isotropes.

S'ils sont isotropes de noms contraires, le couple commun $a_1 - a_2$ appartient au carré $a_1a_3a_2a_4$, dont les sommets a_3 et a_4 sont les centres des deux systèmes isotropes.

Les deux systèmes ont des caractéristiques différentes et ne sont pas parallèles.

Si les systèmes sont isotropes de même nom, il ne peuvent avoir un couple commun d'inséparables sans se confondre, et par conséquent ils sont parallèles.

Deux systèmes isotropes de même nom ont leurs caractéristiques égales, et leurs grands axes, en nombre infini, peuvent être considérés comme parallèles.

5° Un système est isotrope et l'autre est radié.

Un couple commun d'inséparables $a_1 - a_2$ appartient au carré $a_1 a_3 a_2 a_4$ parfaitement déterminé, puisque les sommets a_3 et a_4 sont deux points homologues des figures associées du système radié et que l'un de ces deux points est le centre du système isotrope.

Les deux systèmes ont des caractéristiques différentes et ne peuvent jamais être parallèles.

6° Les deux systèmes sont radiés.

Projetons-les cylindriquement sur un plan, de manière que la projection de l'un d'eux soit isotrope.

On voit que les deux systèmes radiés ont un couple commun d'invariables ou sont parallèles, suivant que leurs projections ont un couple commun ou sont parallèles.

Pour que leurs projections soient parallèles, il faut et il suffit qu'elles soient isotropes de même nom.

Pour que les projections soient isotropes, il faut et il suffit que les ellipses de répartition des deux systèmes radiés se projettent suivant des circonférences, ce qui exige que les ellipses des deux systèmes soient semblables et semblablement placées, et par conséquent que les deux systèmes aient leurs grands axes parallèles.

Pour que les projections soient isotropes de même nom, il faut et il suffit, de plus, que les deux systèmes aient la même caractéristique.

Nous avons démontré le théorème pour tous les cas et, en même temps, la proposition suivante :

Théorème. — Pour que deux systèmes similaires soient parallèles, il faut et il suffit qu'ils aient la même caractéristique et que leurs grands axes soient parallèles.

On remarquera que deux systèmes conjugués $\varphi_1 - \varphi_2$ et $\varphi_2 - \varphi_1$ ont en commun le couple d'inséparables qui se confondent avec le centre commun aux deux systèmes.

12. Théorème. — Par un couple d'inséparables $a_1 - a_2$ n'appartenant pas à un système donné de figures similaires, on peut toujours mener un système similaire parallèle au système donné et l'on n'en peut mener qu'un seul.

Si le système donné est disjoint ou conjoint, il se réduit à deux droites parallèles A et A′, et tout système parallèle devant avoir la même caractéristique est aussi disjoint ou conjoint.

Le système parallèle ne peut être que le couple des droites parallèles à A et A′, menées par les points a_1 et a_2.

Si le système donné est isotrope, positif ou négatif, le système parallèle, isotrope de même nom, est évidemment déterminé.

Si le système est radié, le système parallèle est aussi radié, et a même caractéristique et même direction de grand axe. Il en résulte que la position de son centre o est déterminée sans ambiguïté, puisque dans le triangle oa_1a_2 on connaît le rapport des côtés oa_1 et oa_2, égal au carré de la caractéristique, et la direction de la bissectrice de l'angle a_1oa_2, parallèle au grand axe.

Le système similaire déterminé par les deux couples d'invariables $a_1 — a_2$ et $o — o$ est évidemment le seul qui soit parallèle au système donné.

Le théorème est démontré pour tous les cas.

13. Ce théorème nous autorise à admettre que deux systèmes similaires parallèles ont en commun un couple d'inséparables à l'infini.

Nous dirons donc que deux systèmes similaires distincts ont toujours un couple commun de points invariables, situé sur une droite propre ou sur la droite à l'infini.

Appelons *cycliques* les points inséparables d'un système isotrope situés sur la droite à l'infini.

Considérons deux systèmes isotropes de même nom sur deux plans superposés et, le plan du premier système restant immobile, faisons mouvoir sur lui-même le plan du second système.

Les points cycliques du second système ne cessent jamais de se confondre avec les points cycliques du premier. Il suit de là que les positions des points cycliques sur le plan d'un système isotrope sont indépendantes de la position du système sur ce plan.

Il est logique de donner à ces points le nom de points cycliques du plan. Et nous avons cette propriété singulière.

Théorème. — Dans le mouvement d'un plan sur lui-même, ses deux points inséparables cycliques restent immobiles.

14. Soient $\varphi_1 - \varphi_2$ deux figures similaires radiées, φ_3 et φ_4 leurs figures associées, et a_1, a_2, a_3, a_4 un quadruple de points homologues dans les figures affines $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$.

Nous savons que $a_1a_3a_2a_4$ est un carré.

La figure φ_1 restant immobile, transportons la figure φ_2 parallèlement à elle-même et soit φ'_2 sa nouvelle position.

Le système $\varphi_1 - \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ sera remplacé par le système $\varphi_1 - \varphi'_2$, φ'_3, φ'_4 et le carré $a_1a_3a_2a_4$ par le carré $a_1a'_3a'_2a'_4$.

On démontre aisément que les longueurs et les directions des droites $a_2a'_2$, $a_3a'_3$, $a_4a'_4$ sont indépendantes du choix du carré $a_1a_3a_2a_4$ et, par conséquent, que les figures φ'_3 et φ'_4 ne sont autres que les figures φ_3 et φ_4 déplacées parallèlement à elles-mêmes, dans des sens opposés.

D'où l'on déduit que les deux systèmes $\varphi_1 - \varphi_2$ et $\varphi_1 - \varphi'_2$ ont même caractéristique et que leurs grands axes sont parallèles. Ces deux systèmes sont donc parallèles. Plus généralement :

Théorème. — Si l'on déplace parallèlement à elles-mêmes deux figures similaires $\varphi_1 - \varphi_2$, on obtient un autre système de figures similaires $\varphi'_1 - \varphi'_2$ parallèle au premier.

15. Soient π_1 et π_2 deux plans parallèles et π le plan placé à égale distance de π_1 et π_2.

Nous appellerons *plan central* le plan π et *plans directeurs* les plans π_1 et π_2.

Sur le plan central π plaçons deux figures similaires $\varphi_1 - \varphi_2$, puis projetons orthogonalement φ_1 en φ'_1 sur π_1 et φ_2 en φ'_2 sur π_2.

Si le système $\varphi_1 - \varphi_2$ est disjoint ou conjoint, il sera remplacé par le système disjoint $\varphi'_1 - \varphi'_2$.

Mais, si le système est radié, nous obtiendrons une nouvelle espèce de figures similaires auxquelles nous donnerons le nom de *congruentes*.

Le système congruent $\varphi'_1 - \varphi'_2$ sera dit non isotrope ou isotrope suivant que le système radié $\varphi_1 - \varphi_2$ sera non isotrope ou isotrope.

Projetons cylindriquement sur un plan quelconque les figures $\varphi_1, \varphi_2, \varphi'_1, \varphi'_2$.

Il est clair que les projections des figures φ'_1 et φ'_2 se confon-

dront avec les projections des figures φ_1 et φ_2, convenablement déplacées parallèlement à elles-mêmes.

Or, les figures radiées $\varphi_1 - \varphi_2$ sont projetées suivant un système radié.

Donc, les figures congruentes $\varphi'_1 - \varphi'_2$ seront projetées suivant un système radié parallèle au précédent.

Il n'y a d'exception que lorsque la projection cylindrique est parallèle aux plans directeurs; dans ce cas, les figures congruentes sont projetées suivant deux droites parallèles situées sur les plans directeurs, c'est-à-dire suivant un système similaire disjoint.

Nous pouvons maintenant énoncer les propositions suivantes dans toute leur généralité :

Théorème. — La projection sur un plan d'un couple de figures similaires quelconques, dans le plan ou dans l'espace, est toujours un couple de figures similaires.

Théorème. — Deux couples quelconques d'inséparables déterminent toujours un couple de figures similaires et un seul.

16. Appelons *support,* toute droite sur laquelle se trouvent deux points inséparables d'un système congruent.

Le lieu géométrique des supports est une congruence.

On démontrerait facilement, en s'appuyant sur les deux propositions énoncées au n° 8, les deux propriétés suivantes :

Par un point quelconque de l'espace passe un support et un seul;

Et, corrélativement, un plan quelconque de l'espace contient un support et un seul.

En d'autres termes :

Théorème. — Le lieu géométrique des supports d'un système congruent est une congruence linéaire.

Nous ferons remarquer que cette proposition n'est qu'un cas particulier de la suivante :

Deux systèmes collinéaires, situés dans des plans différents et dont la droite d'intersection est un élément correspondant commun, sans que les points de cette droite se correspondent à eux-mêmes, engendrent un système de rayons de premier ordre et première classe; toute droite, qui joint deux points homologues

des deux plans, fait partie du système. (Reye, *Géométrie de position*, 2e partie, p. 90.)

Il est presque évident que la congruence linéaire déterminée par nos figures similaires congruentes ne possède ni points singuliers ni plans singuliers.

D'où l'on conclut que cette congruence linéaire est le lieu géométrique des droites qui rencontrent deux mêmes droites fixes imaginaires conjuguées, Δ et Δ', appelées directrices.

17. Nous avons rencontré six systèmes différents de figures similaires, savoir :

Première espèce. . .	1° Les conjointes.
	2° Les disjointes.
	3° Les radiées isotropes.
	4° Les radiées non isotropes.
Seconde espèce. . .	5° Les congruentes isotropes.
	6° Les congruentes non isotropes.

Nous ferons voir que les figures similaires de première et de seconde espèce sont les représentations géométriques les plus naturelles des droites imaginaires de première et de seconde espèce.

Ce mode de représentation des droites imaginaires sera identifié à celui de Laguerre.

M. Molenbroek est parvenu à la même représentation que Laguerre, par une étude sur la théorie des quaternions de Hamilton (*N. A. M.*, 1891, p. 434).

NOTE

SUR

L'HYPOCYCLOÏDE A TROIS REBROUSSEMENTS

PAR

M. A. GOB

PROFESSEUR A L'ATHÉNÉE ROYAL DE HASSELT.

BIBLIOGRAPHIE

Steiner, *Ueber eine besondere Curve dritter Classe (und vierten Grades).* (OEuvres complètes, II, 639; Journal de Crelle, LIII, p. 231.)

Cremona, *Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements.* (Journal de Crelle, 1864, p. 101.)

Serret, *Sur un théorème de M. Ferrers.* (N. A., 1870, p. 73.)

Painvin, *Note sur l'hypocycloïde à trois rebroussements.* (N. A., 1870, p. 202.)

Laguerre, *Extrait d'une lettre adressée à M. Bourget.* (N. A., 1870, p. 254.)

Callandeau, *Théorèmes sur l'hypocycloïde à trois rebroussements.* (N. A., 1870, p. 472.)

Cahen, *Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements.* (N. A., 1875, p. 21.)

Barbarin, *Sur la droite de Simson.* (Math., t. II, p. 106.)

Cesaro, *Question proposée.* (Math., t. II, p. 110.)

Weill, *Sur la droite de Simson.* (J. M. S., 1884, p. 11.)

De Longchamps, *Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements.* (J. M. S., 1884.)

Hadamard, *Extrait d'une lettre à M. de Longchamps.* (J. M. S., 1884, p. 226.)

Balitrand, *Quelques problèmes sur les coniques.* (J. M. S., 1894, p. 73.)

Cazamian, *Théorèmes sur l'hypocycloïde à trois rebroussements.* (J. M. S., 1894, p. 78.)

P. Serret, *Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements.* (C. R. Ac. S. Paris, 2e sem., nos 9, 10, 11.)

NOTE

SUR

L'HYPOCYCLOÏDE A TROIS REBROUSSEMENTS

1. Lorsque deux points α et β se déplacent sur un cercle ω (fig. 1) de rayon ρ, avec des vitesses v et v' telles que $v = -2v'$, on sait que la droite $\alpha\beta$ enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements (H). Le point de contact M s'obtient en prolon-

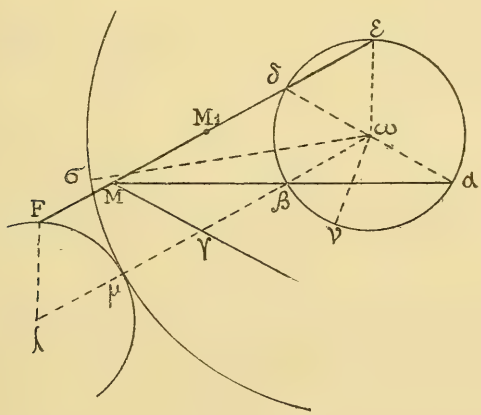


Fig. 1.

geant la droite $\alpha\beta$ d'une longueur égale à elle-même, de sorte que $\beta M = \alpha\beta$, et la seconde tangente menée par M est parallèle au rayon $\omega\beta$; elle coupe le cercle ω en deux points δ et ε dont l'un, δ, est le point diamétralement opposé à α. Nous donnerons au cercle ω le nom de *cercle directeur* de l'hypocycloïde.

Soient PM_1, PM_2, PM_3 (*) les trois tangentes menées par un point P à l'hypocycloïde (H), et soit ABC le triangle formé par les tangentes menées à cette courbe perpendiculairement aux tangentes PM_1, PM_2, PM_3. On sait que P est l'orthocentre du triangle ABC et que le cercle directeur ω de (H) coïncide avec le cercle des neuf points de ce triangle. On conclut de là que les tangentes PM_1, PM_2, PM_3 sont égales aux hauteurs du triangle ABC, et que les points de contact de (H) avec les côtés du triangle ABC sont les symétriques N_1, N_2, N_3 des pieds des hauteurs par rapport aux milieux des côtés de ce triangle. Donc les normales aux points N_1, N_2, N_3 se coupent en un même point K symétrique de P par rapport au centre du cercle ABC, d'où $\omega k = 3\omega P$; par conséquent : *Étant données trois tangentes à l'hypocycloïde concourantes en un point* P, *il existe trois normales parallèles à ces tangentes et concourantes en un point* K; *les points* P *et* K *sont en ligne droite avec le centre du cercle directeur, et l'on a* $\omega k = 3\omega P$.

2. Désignons par t_1, t_2, t_3 les longueurs des tangentes PM_1, PM_2, PM_3, et par n_1, n_2, n_3 les longueurs des normales KN_1, KN_2, KN_3. On a

$$t_1 = 4\rho \sin B \sin C, \tag{1}$$

$$n_1 = 4\rho (\cos A - \cos B \cos C). \tag{2}$$

De ces expressions on tire les relations suivantes :

$$t_1 \sin A = t_2 \sin B = t_3 \sin C, \tag{3}$$

$$t_1^2 - n_1^2 = t_2^2 - n_2^2 = t_3^2 - n_3^2 = 64\rho^2 \cos A \cos B \cos C, \tag{4}$$

$$\frac{n_1}{t_1} + \frac{n_2}{t_2} + \frac{n_3}{t_3} = 1. \tag{5}$$

La relation (3) montre que P est le centre de gravité du triangle formé par les normales aux points M_1, M_2, M_3. En d'autres termes, *si par un point* P *on mène à l'hypocycloïde trois tangentes* PM_1, PM_2, PM_3, *ce point est un foyer de l'ellipse de Steiner inscrite au triangle* $M_1M_2M_3$.

(*) Le lecteur est prié de tracer la figure.

3. Désignons par P, M_2, M_3 les angles du triangle PM_2M_3, et par R le rayon du cercle PM_2M_3. La formule (3) peut s'écrire :

$$t_1 = \frac{t_2 \sin M_1PM_3}{\sin P} = \frac{2R \sin M_3}{\sin P} \sin M_1PM_3.$$

Supposons que les points M_2 et M_3 tendent vers une même position limite M. Désignons par r le rayon de courbure en ce point, par t la longueur de la tangente menée par M et dont le point de contact n'est pas M, et par φ l'angle de cette tangente avec celle qui touche la courbe au point M. On a

$$t = \lim t_1 = \lim \frac{2R \sin M_3}{\sin P} \sin M_1PM_3.$$

Or

$$\lim 2R = r, \qquad \lim M_1PM_3 = \varphi,$$

$$\lim \frac{\sin M_3}{\sin P} = \lim \frac{\sin M_3}{\sin (M_2 + M_3)} = \lim \frac{1}{\cos M_2 + \dfrac{\sin M_2}{\sin M_3} \cos M_3} = \frac{1}{2};$$

par suite, on a

$$t = \frac{r}{2} \sin \varphi.$$

Donc : *La tangente menée par un point* M *de l'hypocycloïde et dont le point de contact n'est pas* M, *est égale à la moitié de la projection du rayon de courbure en* M *sur cette tangente.*

4. Il résulte de la formule (3), que la droite PM_1 est une symédiane du triangle PM_2M_3. Cette droite est donc symétrique de la médiane PD du triangle PM_2M_3 par rapport à la bissectrice de l'angle M_2PM_3. Si l'on suppose que M_2 et M_3 tendent vers une même position limite M, P tendra aussi vers M et la droite PD aura pour limite *l'axe d'aberration* (*) relatif au point M.

(*) L'axe d'aberration en un point M d'une courbe est la position limite de la droite qui joint le point M au milieu d'une corde parallèle à la tangente en M, et qui tend à se confondre avec cette tangente. (Salmon-Chemin, *Courbes planes*, 511.)

Donc : *L'axe d'aberration en un point* M *de l'hypocycloïde est symétrique par rapport à la tangente au point* M *de la seconde tangente menée par ce point.*

5. L'axe d'aberration en un point M est le lieu des centres des coniques qui ont en ce point avec la courbe un contact quartiponctuel. Proposons-nous de chercher l'enveloppe de cette droite lorsque M décrit l'hypocycloïde ; cette enveloppe sera le lieu des centres des coniques qui ont avec (H) un contact quintiponctuel.

La droite MM_1 (fig. 1) étant parallèle à $\omega\beta$, l'axe d'aberration est la parallèle menée par M à $\omega\alpha$; soit γ le point où cette droite rencontre $\omega\beta$, la distance $\omega\gamma$ sera égale à 2ρ. Les points α et β décrivent le cercle directeur avec des vitesses v et v' telles que $v = -2v'$; le point γ décrit donc un cercle avec une vitesse angulaire qui est égale et de sens contraire à la moitié de la vitesse de rotation de la droite $M\gamma$ autour de γ. On conclut de là que $M\gamma$ enveloppe une hypocycloïde à six rebroussements. Donc : *Le lieu du centre d'une conique ayant avec l'hypocycloïde un contact quintiponctuel, est une hypocycloïde à six rebroussements.*

6. La parabole qui a avec la courbe un contact quartiponctuel en M a son axe parallèle à l'axe d'aberration ; son foyer est donc situé sur la droite MM_1. Cette parabole a le même centre de courbure en M que l'hypocycloïde ; or dans la parabole, la projection du milieu du rayon de courbure sur le rayon vecteur coïncide avec le foyer. En rapprochant cette remarque du théorème démontré au § 3, on obtient le beau théorème dû à Laguerre (*) (*N. A.*, 1870, p. 254) :

Le foyer F *de la parabole qui suroscule la courbe au point* M *est le symétrique, par rapport à* M, *du point de contact* M_1 *de la seconde tangente menée par* M.

(*) Le théorème est énoncé sans démonstration dans l'article cité.

7. Proposons-nous de chercher le lieu de F lorsque M décrit l'hypocycloïde. On sait (§ 1) que les points α et δ (fig. 1) sont diamétralement opposés sur le cercle ω; le triangle $M\delta\alpha$ est donc isoscèle et $M\delta = 2\rho$; d'ailleurs, $M_1\delta = \delta\varepsilon$ et $FM = MM_1$; on conclut de là que $F\varepsilon = 4\rho$. Si nous portons sur $\omega\beta$ une longueur $\omega\lambda$ égale à 4ρ, la figure $F\varepsilon\omega\lambda$ sera un parallélogramme et le cercle décrit de λ comme centre avec ρ pour rayon passera par F et sera tangent en un point μ au cercle décrit de ω comme centre avec un rayon égal à 3ρ. Soient ν et σ le sommet et le point de rebroussement de l'hypocycloïde les plus rapprochés du point M; on a les égalités d'angles

$$F\lambda\mu = \delta\omega\beta = 180^\circ - \alpha\omega\beta = 3(60^\circ - \beta\omega\nu) = 3\mu\omega\sigma$$

ou

$$\text{arc } F\mu = \text{arc } \sigma\mu.$$

Le mouvement du cercle λ est donc un simple roulement sur le cercle $\sigma\mu$; par conséquent :

Le lieu des foyers des paraboles surosculatrices à l'hypocycloïde (H) *est une épicycloïde à trois rebroussements.*

8. Les formules (1) et (2) comportent de nombreuses conséquences; nous nous bornerons à en établir quelques-unes.

a) En exprimant le rayon du cercle des neuf points du triangle ABC en fonction des hauteurs de ce triangle, on obtient la relation qui lie les longueurs des tangentes menées d'un point P à l'hypocycloïde (*)

$$t_1t_2t_3\left(\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}-\frac{1}{t_1}\right)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_3}-\frac{1}{t_2}\right)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_3}\right)=\frac{1}{\rho}.$$

b) On obtient par un calcul facile :

$$\overline{M_2M_3}^2 = 16\rho^2\sin^2 A\,(\sin^2 B + \sin^2 C + 2\sin B\sin C\cos A)$$

$$\overline{N_2N_3}^2 = 16\rho^2\sin^2 A\,(\cos^2 B + \cos^2 C - 2\cos B\cos C\cos A),$$

(*) M. Hadamard a démontré cette formule sous une forme un peu différente. (*J. M. S.*, 1884, p. 226.)

d'où

$$\overline{M_2M_3}^2 + \overline{N_2N_3}^2 = 32\,\rho^2 \sin^2 A\,(1 + \cos^2 A).$$

Donc : *Si deux angles constants et ayant leurs côtés parallèles se déplacent de manière que les côtés de l'un soient tangents et les côtés de l'autre normaux à l'hypocycloïde, la somme des carrés des cordes comprises entre les deux points de contact et entre les deux points d'incidence est constante.*

c) Si le point K est situé sur l'hypocycloïde, on a $n_1 = 0$ et, par suite

$$\cos A = \cos B \cos C, \quad \sin B \sin C = 2 \cos B \cos C,$$
$$\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = 2, \quad \operatorname{tg} A = \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C,$$
$$n_2 = 4\rho \cos B \sin^2 C, \quad n_3 = 4\rho \cos C \sin^2 B,$$
$$n_2 n_3 = 64\rho^2 \cos^3 A.$$

Le produit des normales menées par un point de l'hypocycloïde est proportionnel au cube du cosinus de leur angle.

RECTIFICATION

DES

ÉPITROCHOÏDES

PAR

M. A. GOB

PROFESSEUR A L'ATHÉNÉE ROYAL DE HASSELT.

RECTIFICATION

DES

ÉPITROCHOÏDES

On a d'ordinaire recours au calcul intégral pour montrer l'équivalence des arcs de certaines courbes. Cependant l'emploi des méthodes géométriques ou cinématiques conduit souvent au résultat d'une manière plus rapide et plus élégante. Il est particulièrement intéressant d'utiliser ces procédés pour ramener à des arcs d'ellipse les arcs des courbes dont la rectification dépend d'intégrales elliptiques. M. Neuberg a montré par des considérations de cette nature (*N. C. M.*, t. V, p. 354) que l'arc de trochoïde (cycloïde allongée ou accourcie) est égal à l'arc correspondant d'une certaine ellipse. Dans le § 1 de cette note, nous reproduisons la démonstration de M. Neuberg; nous en tirerons ensuite quelques conséquences et nous étendrons cette démonstration aux arcs d'épitrochoïdes (épicycloïdes ou hypocycloïdes allongées ou accourcies).

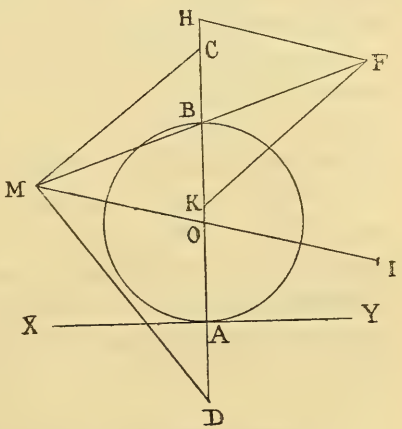


Fig. 1.

1. Considérons la trochoïde T engendrée par un point M (fig. 1) invariablement lié au cercle O qui roule sur la droite XY. Soient A le point de contact du cercle O et de la droite XY, et B le point diamétralement opposé à A; portons sur AB des longueurs OC et OD égales à OM.

Considérons l'ellipse E décrite par le point B de la droite CD lorsque cette droite glisse de façon que ses extrémités C et D s'appuient constamment sur les côtés de l'angle CMD que nous supposons rendu immobile ; elle a pour demi-axes $R' + R$, $\pm (R' - R)$, où $R = OA, R' = OM$. Nous convenons de dire que les points B et M sont des points correspondants de l'ellipse et de la trochoïde. Cela posé, *l'arc compris entre deux points de la trochoïde est le double de l'arc compris entre les points correspondants de l'ellipse* E.

Faisons tourner d'un angle droit autour de leur point d'application les vitesses des différents points de la figure, et convenons de représenter par OA la vitesse de translation du point O. Le point M est animé de deux vitesses : une vitesse de translation égale à celle du point O et une vitesse de rotation représentée par MO; sa vitesse totale sur la trochoïde est représentée par MA.

Pour obtenir la vitesse du point B sur l'ellipse E, remarquons que le centre instantané de rotation de la droite CD est le point symétrique de M par rapport à O, et comme les vitesses des différents points de CD sont proportionnelles à leur distance au point I, il suffira de calculer la vitesse de C pour connaître celle de B. Rendons l'angle CMD immobile; il suffira pour cela de supprimer la translation parallèle à XY et d'introduire deux vitesses, à savoir : une vitesse égale et contraire à la vitesse de rotation du point M autour de O, et une vitesse égale et contraire à celle qui provient de la rotation de l'angle CMD autour de M. La première de ces vitesses est représentée par MO, et la seconde par $\frac{CM}{2}$, car la vitesse de rotation de CM n'est que la moitié de celle de OM. Ces deux vitesses étant représentées par $\frac{MI}{2}$ et $\frac{CM}{2}$, leur résultante le sera par $\frac{CI}{2}$; il résulte de là que la vitesse du point B est représentée par $\frac{BI}{2}$ ou $\frac{MA}{2}$; cette vitesse est donc la moitié de celle du point M sur la trochoïde; cela démontre le théorème.

2. Prolongeons MB d'une longueur BF égale à BM, et soit E′ l'ellipse décrite par F lorsque B décrit l'ellipse E. Les ellipses E et E′ sont homothétiques, et les arcs correspondants

de ces ellipses sont entre eux dans le rapport 1 : 2, de sorte que l'arc de trochoïde est égal à l'arc correspondant de l'ellipse E'. Construisons maintenant l'ellipse E'' symétrique de E' par rapport au point B. Cette ellipse sera tangente en M à la trochoïde, et son mouvement sera un simple roulement sur cette courbe. Nous dirons que cette ellipse est *associée* à la trochoïde.

Le centre de l'ellipse E'' est le point F; or, si l'on prolonge OB d'une longueur BH égale à OB, le point H décrit une parallèle à XY avec une vitesse égale à celle du point O, et la droite HF tourne autour de H avec une vitesse angulaire égale à celle de OM; par conséquent, le point F décrit une trochoïde égale à la trochoïde T.

Les axes de l'ellipse E'' sont les parallèles menées par F à MC et MD. Soit FK l'un de ces axes; on aura BK = BC. Le point K décrit donc une droite et le mouvement de la droite FK est un mouvement cycloïdal identique à celui de MB; cette droite enveloppe donc une cycloïde. Par conséquent :

Si à l'intérieur d'une trochoïde on fait rouler l'ellipse associée, le centre de cette ellipse décrit une trochoïde égale à la première et les axes de cette ellipse enveloppent des cycloïdes.

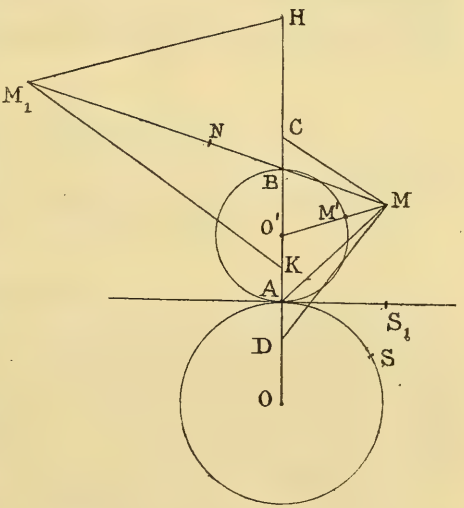


Fig. 2.

3. Considérons l'épitrochoïde décrite par le point M invariablement lié au cercle O' qui roule sur le cercle O (fig. 2). Portons sur la circonférence O et sur la tangente commune aux deux cercles des longueurs AS et AS_1 égales à l'arc AM', et considérons la trochoïde décrite par le point M lorsque le cercle O' roule sur la droite AS_1.

Lorsque le cercle O′ roule sur le cercle O, les vitesses des différents points de ce cercle sont proportionnelles à leur distance au point A. Si v et v_0 sont les vitesses des points M et O′, on a donc

$$\frac{v}{MA} = \frac{v_0}{O'A}.$$

De même, si v' et v'_0 sont les vitesses de ces points lorsque le cercle O′ roule sur la droite S_1A, on a

$$\frac{v'}{MA} = \frac{v'_0}{O'A},$$

d'où

$$\frac{v}{v'} = \frac{v_0}{v'_0}.$$

Or, si dans le mouvement cycloïdal le point O′ décrit un chemin égal à S_1A, dans le mouvement épicycloïdal ce point décrira dans le même temps un arc de cercle qui est égal à $\frac{OO'}{OA} \times S_1A$, donc

$$\frac{v_0}{v'_0} = \frac{OO'}{OA},$$

et par suite

$$\frac{v}{v'} = \frac{OO'}{OA} = \frac{R + R'}{R}.$$

Les vitesses du point M sur l'épitrochoïde et sur la trochoïde sont donc dans un rapport constant, par conséquent : *Si un cercle de rayon* R′ *roule successivement sur un cercle de rayon* R *et sur une droite en entraînant un point* M *de son plan, le rapport des arcs correspondants d'épitrochoïde et de trochoïde décrits par ce point est constant et égal à* $1 + \frac{R'}{R}$.

Cette proposition comporte d'assez nombreuses conséquences; nous nous contenterons d'indiquer la suivante, qui nous paraît intéressante :

Si un cercle roule successivement à l'intérieur et à l'extérieur d'un autre cercle en entraînant un point de son plan, la demi-somme des arcs d'hypotrochoïde et d'épitrochoïde décrits par ce

point est égale à l'arc de trochoïde que décrirait ce point si le cercle roulait sur une droite.

4. Après avoir pris (fig. 2) sur le diamètre AB les longueurs $O'C = OD = O'M$, considérons l'ellipse E décrite par le point B lorsque les extrémités de la droite CD glissent sur les côtés de l'angle droit CMD. Nous avons vu (§ 1) que l'arc de trochoïde est le double de l'arc correspondant de cette ellipse. Si donc on désigne par e, e_1 et t des arcs correspondants de l'épitrochoïde, de l'ellipse et de la trochoïde, on aura

$$\frac{e}{e_1} = \frac{200'}{OA}.$$

Prolongeons BM d'une longueur BM_1 telle que $\frac{MM_1}{MB} = \frac{200'}{OA}$, et soit E' l'ellipse décrite par M_1 lorsque B décrit l'ellipse E; nous dirons que E' est l'ellipse *associée* à l'épitrochoïde. Les arcs correspondants des ellipses E' et E sont dans le rapport $\frac{200'}{OA}$, par conséquent : *L'arc d'épitrochoïde est égal à l'arc correspondant de l'ellipse associée.*

5. Construisons l'ellipse E'' symétrique de E' par rapport au milieu N de MM_1 ; la normale en M_1 à l'ellipse E' est parallèle à MA, et par conséquent l'ellipse E'' est tangente en M à l'épitrochoïde et son mouvement se réduit à un simple roulement sur l'épitrochoïde.

Le centre de l'ellipse E'' est le point M_1 ; menons M_1H parallèle à MO'. Le point H décrit un cercle avec une vitesse angulaire égale à celle du point A, et la droite HM_1 tourne autour de H avec une vitesse angulaire égale à celle de MO' ; donc le point M_1 décrit une épitrochoïde; cette épitrochoïde est d'ailleurs semblable à celle que décrit le point M, car des égalités

$$\frac{O'H}{O'B} = \frac{200'}{OA}, \quad \frac{M_1H}{O'M} = \frac{BM_1}{BM} = \frac{200' - OA}{OA},$$

on tire

$$\frac{M_1H}{O'M} = \frac{OH}{OO'}.$$

Les axes de l'ellipse E'' sont les parallèles menées par M_1 à MC et MD. Soit MK l'un de ces axes ; on a

$$\frac{BK}{BC} = \frac{BM_1}{BM} = \frac{200' - OA}{OA}.$$

Par suite, BK est une longueur constante et le point K décrit un cercle. La droite BK est donc animée d'un mouvement épicycloïdal, et par conséquent elle enveloppe une épicycloïde. On a donc le théorème suivant :

Si à l'intérieur d'une épitrochoïde on fait rouler l'ellipse associée, le centre de cette ellipse décrit une épitrochoïde semblable à la première ; les axes de l'ellipse enveloppent les épicycloïdes.

RECHERCHES ANATOMIQUES

SUR LES FEUILLES DE

L'ORNITHOGALUM CAUDATUM Ait.

PAR

Hyac. LONAY

DOCTEUR EN SCIENCES NATURELLES
ASSISTANT DE BOTANIQUE A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

INTRODUCTION

Parmi les plantes ornementales populaires, il en est une qui, à l'égal de beaucoup d'autres, mérite de fixer l'attention : c'est l'*Ornithogalum caudatum* Ait., Liliacée du Cap de Bonne-Espérance, introduite dans nos cultures il y a un peu plus d'un siècle. Du milieu d'un énorme bulbe tuniqué, compact, verdâtre, gros parfois comme une tête d'enfant et reposant entièrement à la surface du sol, on voit surgir un panache de feuilles rejetées alternativement à droite et à gauche. Les plus externes, larges, rubanées et pendantes, se flétrissent par le bout; elles atteignent de 50 centimètres à 1 mètre de longueur et 5 ou 6 centimètres de largeur; au contraire, celles situées au centre, plus jeunes, plus courtes et plus rigides, dressent vers le ciel un long bout cylindrique.

Exigeant fort peu de soins, cette plante possède en outre le privilège d'être facilement propagée, non seulement par de nombreuses graines qu'engendrent des fleurs très modestes et disposées en épi à l'extrémité d'une longue hampe flexueuse de la grosseur d'un crayon, mais surtout par de nombreuses bulbilles insérées d'une façon insolite sur les tuniques charnues du bulbe, dissimulées aussi longtemps que les tuniques scarieuses de l'extérieur ne se sont pas rompues, et qui se succèdent durant tout le cours de l'existence de la plante.

Celle-ci, à la faveur de ces diverses circonstances, a pris un rang prépondérant parmi les plantes ornementales de fenêtre : détail caractéristique, à Bruxelles, on l'appelle vulgairement la *plante des cordonniers.*

L'étrangeté de cette plante, déjà si bizarre à première vue, ne fait qu'augmenter lorsqu'on l'observe de plus près dans toutes ses parties. D'abord, son bulbe est formé par les bases engainantes et charnues des feuilles. Celles-ci sont plus ou moins complètes; seules les plus internes sont intactes, puisque leur base est surmontée d'un limbe qui s'atténue au sommet en un bout cylindrique vivant. Aux feuilles plus âgées, ce bout a disparu en se flétrissant et le limbe seul surmonte la gaine; celle-ci, seule, persiste dans les feuilles plus âgées encore; enfin les plus vieilles, c'est-à-dire les plus extérieures, ne consistent plus qu'en des écailles scarieuses, transparentes, résultant de la résorption des tissus précédemment gorgés d'aliments.

Le limbe des feuilles adultes est lisse et glabre; il ne s'atténue pas en devenant simplement plus étroit, mais en repliant plutôt ses bords, qui deviennent concrescents avec la partie du milieu du limbe, de manière à former un bout cylindrique surmontant une sorte de petite chape. Malgré sa fugacité, ce bout cylindrique

que je désignerai dorénavant, faute d'une appellation plus convenable, sous le nom d'*acumen*, est très caractéristique ; il atteint souvent plus de 2 décimètres de longueur.

Chez plusieurs Liliacées bulbeuses telles que la Jacinthe, l'Ail, l'Échalotte, etc., les caïeux ne sont autre chose que des bourgeons axillaires, c'est-à-dire nés à l'aisselle des écailles ou des tuniques du bulbe mère ; ces bourgeons affectent bientôt les caractères de petits bulbes qui sont destinés à propager la plante ; ils sont donc une production normale, puisque toutes les Angiospermes portent à l'aisselle de chacune de leurs feuilles un bourgeon plus ou moins développé qui très souvent, il est vrai, se résorbe chez les Monocotylées. Dans l'*Ornithogalum caudatum*, il est rare que les bourgeons axillaires du bulbe se développent normalement. Il semble que jamais ils ne deviennent des caïeux. Cependant, sur la plante adulte, on aperçoit toujours en dessous des tuniques externes, transparentes et scarieuses, de nombreux petits organes bulbiformes verts, dont les plus gros peuvent atteindre les dimensions d'une noisette. Lorsque les tuniques scarieuses qui les emprisonnent se déchirent, ces organes tombent sur le sol, s'y enracinent et finissent par constituer, au bout de deux ans, autant de plantes adultes. Malgré l'analogie de forme et de fonction qu'ils offrent avec les caïeux, ces organes semblent cependant posséder une origine toute différente. Ils se développent, en effet, à plusieurs ensemble *à la face externe* des gaines charnues, et leur formation se fait en ordre basipète. Ils diffèrent donc, à ces divers points de vue, assez notablement des caïeux ordinaires, et, pour cette raison, je les ai désignés sous le nom de bulbilles.

Cette organisation singulière avait déjà attiré mon attention il y a quelques années, et j'ai cherché à trouver dans les auteurs

des éclaircissements à ce sujet. Mes recherches n'ayant pas abouti de ce côté, je me suis efforcé de trouver par l'anatomie l'explication de ces quelques particularités, et cette étude m'a entraîné à étudier avec soin les caractères extérieurs, et ceux fournis par la structure interne, de tous les appendices de l'*Ornithogalum caudatum.*

J'ai donc examiné non seulement la feuille la plus complète et les bractées de la plante adulte, mais encore les organes appendiculaires existant dans les bourgeons axillaires végétatifs que j'ai eu la bonne fortune de récolter, ceux des plantules en germination, ceux des bulbilles qui naissent naturellement sur les gaines foliaires et, enfin, ceux des bulbilles adventives nées sur des morceaux de gaine foliaire. Il semble, en effet, nécessaire aujourd'hui, quand on veut se faire une idée exacte d'un membre tel que la feuille, d'en scruter l'organisation sous ses diverses manières d'être. Les différentes manifestations sous lesquelles il se présente sont très variables sur une même plante, mais diffèrent certes encore beaucoup plus d'une espèce à une autre. Dans la pratique, dans le langage courant, en effet, on est trop souvent tenté d'admettre une forme déterminée pour chaque espèce que l'on considère. Ces mots, « la feuille du Chêne » éveilleront de suite l'idée d'une feuille longue de 7 à 8 centimètres environ, à bords sinueux et à nervation pennée. Cependant, le Chêne porte encore des feuilles ayant des aspects bien différents : cotylédons, feuilles souterraines, feuilles périulaires, bractées, etc., sans parler des organes floraux. La différenciation peut même être poussée plus loin. Quoi qu'il en soit, il n'est pas de plante où elle ne se présente. Il y a donc, dans une même plante, feuilles et feuilles : leur forme et leur organisation dépendent des fonctions qui leur incombent. Les Alle-

mands, grâce à la grande souplesse de leur langue, leur ont donné des noms appropriés à ces fonctions, tandis que nous sommes forcés de recourir à des périphrases parfois bien longues pour désigner chacune d'elles.

Les diverses manières d'être de l'appendice foliaire peuvent être mises en évidence non seulement par l'examen des caractères extérieurs, mais aussi par leurs caractères anatomiques. C'est le but que je poursuis ici en ce qui concerne l'*Ornithogalum caudatum* Ait. Ce travail est partagé en quatre chapitres : le premier, divisé en deux paragraphes, comprend l'étude des feuilles végétatives et des bractées d'une plante adulte; le deuxième expose, dans ses deux paragraphes, l'organisation du cotylédon et des premières feuilles d'une plantule provenant de semis. Le troisième a pour objet la pousse axillaire. Les bulbilles normales d'une part et les bulbilles adventives, d'autre part, sont traitées dans deux autres paragraphes réunis en un quatrième chapitre. Enfin le résumé et les conclusions font naturellement suite à l'exposé de mes recherches.

Il est souhaitable que le groupement d'études analogues permette plus tard l'établissement de vues synthétiques de nature à rendre appréciable le rôle de l'anatomie qui, s'il ne doit pas supplanter celui de la morphologie externe, semble devoir tout au moins le suppléer dans bien des cas critiques au point de vue d'une conception plus juste et plus nette de la série végétale.

Mais avant d'aborder les développements, je crois nécessaire de justifier la détermination spécifique de la plante dont je m'occupe. Il importe, en effet, que l'anatomiste soit absolument fixé sur l'identité du sujet de ses recherches, s'il veut épargner bien des mécomptes non seulement à lui-même, mais encore à ses

confrères. Or, on sait combien la détermination de plantes exotiques, notamment, offre de difficultés. J'en donnerai, comme exemple, notre espèce, l'*Ornithogalum caudatum*, cultivée jusqu'à présent dans les serres du Jardin botanique de Liége sous le nom d'*Ornithogalum bracteatum* Thunb.

La description que Thunberg donne de cette dernière espèce (**52**, p. 314), quoique assez vague, s'applique bien à notre plante. Toutefois il n'est pas fait mention des bulbilles dont l'insertion si caractéristique aurait dû frapper le descripteur. D'autre part, l'Index de MM. Th. Durand et Schinz (**7**, p. 402) ne renseigne ce nom que comme un synonyme d'*Ornithogalum longebracteatum* Jacq. Je recourus à la description originale de Jacquin (**19**, pl. XXIX); mais celle-ci, et la planche qui l'accompagne, sont tout aussi vagues que les données de Thunberg : les bulbilles et l'acumen ne sont ni décrits ni figurés. Je consultai encore le travail de Baker sur les Scillées et les Chlorogalées (**3**, p. 277), dans lequel plusieurs espèces sont renseignées comme possédant un *acumen : O. longebracteatum* Jacq., *O. scilloides* Jacq., *O. Eckloni* Schlecht., *O. caudatum* Ait., *O. virens* Lindl. et *O. biflorum* D. Don.; mais par l'ensemble des caractères, j'en éliminai trois et restai en présence des trois suivantes : *O. longebracteatum*, *O. scilloides* et *O. caudatum*. J'hésitai surtout entre la première et la dernière; mais Baker ne fait pas, pour ces deux espèces, mention des bulbilles qu'il signale pourtant dans d'autres, telles que *O. umbellatum* L., *O. paterfamilias* Godr. et *O. divergens* Boreau.

M. Th. Durand, directeur, et M. De Wildeman, conservateur au Jardin botanique de Bruxelles, voulurent bien m'aider dans la détermination de la plante en litige. Ils me mirent à même de consulter l'herbier général ainsi que plusieurs ouvrages spé-

ciaux, tels notamment que le *Botanical Magazine* (**4**) et le *Flora capensis* de Thiselton Dyer (**51**, p. 515). J'ai pu ainsi dissiper tous mes doutes : la plante qui m'occupe est bien l'*Ornithogalum caudatum* Ait.

Enfin, conduit par M. Lubbers, le si compétent chef de culture au même établissement, j'ai pu me convaincre sur le vif que la plante de Liége est bien la même que celle cultivée sous ce dernier nom à Bruxelles.

J'adresse à ces messieurs mes plus vifs remerciements pour l'empressement qu'ils ont mis à m'éclairer de leurs lumières.

Voici, au surplus, la diagnose la plus récemment donnée dans le *Flora capensis* (**51**, p. 515) pour notre espèce :

« Bulb large, ovoid; leaves 5-6 lorate-lanceolate, acuminate, glabrous, 1 $^1/_2$-2 ft. long, 1-1 $^1/_2$ in. broad low down; peduncle stout, erect, 1 $^1/_2$-3 ft. long; raceme dense $^1/_2$-1 ft. long; pedicels ascending, lower $^1/_2$ in. long ; bracts lanceolate-setaceous, $^1/_2$-$^5/_4$ in. long, projecting beyond the buds; perianth white, $^1/_3$ in. long; segments distinctly keeled with green; stamens $^5/_4$ the length of the perianth; filaments alternantly lanceolate and quadrate at the base; $^1/_{12}$-$^1/_8$ in. long. »

C'est ce caractère des étamines qui sert à distinguer cette espèce de l'*O. longebracteatum*, où elles sont toutes linéaires ou lancéolées. J'ai eu l'occasion d'observer, au Jardin botanique de Liége, la floraison de l'*Ornithogalum* qui a fait l'objet de mes études anatomiques. J'ai pu également y récolter des graines qui ont été semées et qui m'ont procuré les plantules dont j'avais besoin. Ces recherches se sont réparties sur plusieurs années et ont été exécutées avec le secours de tous les procédés tech-

niques : inclusions, microtomes, colorations, etc., mis à la disposition des micrographes modernes.

Les excellents conseils de mon cher Maître, M. le professeur Gravis, ont singulièrement facilité ma tâche. Je suis heureux de lui en témoigner publiquement ma vive reconnaissance.

RECHERCHES ANATOMIQUES

SUR LES FEUILLES DE

L'ORNITHOGALUM CAUDATUM Ait.

CHAPITRE PREMIER

LA PLANTE ADULTE.

La plante adulte est celle qui, ayant eu un développement normalement vigoureux, porte des organes de floraison ou de propagation. Une telle plante peut provenir de semis, de bulbilles adventives ou de bulbilles normales. C'est ce dernier cas qui est réalisé le plus souvent. Il n'est pas probable que cette différence d'origine se répercute dans l'organisation des feuilles végétatives et des bractées.

§ 1. — FEUILLE VÉGÉTATIVE LA PLUS COMPLÈTE.

I. — *CARACTÈRES EXTÉRIEURS.*

Une feuille complète comprend essentiellement trois régions bien distinctes, qui sont, en les considérant de la base au sommet (fig. 1, pl. I) :

1° Une gaine close;

2° Un limbe rubané;

3° Une partie terminale plus ou moins cylindrique ou *acumen*.

Attachée sur le plateau par une insertion nettement circulaire, très étendue, la gaine est fortement charnue — caractère qui se manifeste de bonne heure, — épaisse, ovoïde, haute de 6 à 7 centimètres ; elle présente une coloration blanc verdâtre. Parallèlement à la ligne verticale qui correspondrait à la concrescence des bords fictifs de la gaine et à une petite distance de cette ligne, la gaine porte des bulbilles plus ou moins nombreuses. C'est cette région de la feuille qui persiste le plus longtemps; elle atteint même son plus grand développement pendant que les autres se flétrissent peu à peu. Après que les bulbilles ont achevé de se former et se sont détachées, la gaine se flétrit à son tour, se dessèche et devient une écaille brune et fragile qui cédera sous la pression de la gaine et des bulbilles de la feuille suivante.

Le limbe grandit pendant longtemps et peut atteindre plus de 1 mètre de longueur et 3 à 4 centimètres de largeur. Son épaisseur est loin d'être aussi considérable que celle de la gaine.

L'*acumen* qui surmonte le limbe est le plus souvent semi-cylindrique dans une feuille de plante adulte; dans les conditions les plus favorables, il mesure au maximum 25 centimètres de longueur.

Il est à remarquer que la feuille présente rarement et pendant un temps relativement court ces trois parties simultanément. Toutes trois existent réellement dans la feuille à l'état embryonnaire, ainsi que nous le verrons en nous occupant des bulbilles. Mais c'est l'*acumen* qui est organisé en premier lieu. Il apparaît d'abord (fig. 61, pl. V, 7e feuille d'une bulbille) et s'allonge jusqu'à atteindre sa taille définitive avant l'allongement des autres parties. Le limbe se développe ensuite et l'*acumen* se flétrit. La gaine est d'abord cylindrique; elle se renfle peu à peu et devient charnue; elle emmagasine les réserves alimentaires élaborées dans le limbe. Quand ce dernier commence à se flétrir à son tour, des bulbilles se développent, en ordre basipète, à la face externe des gaines charnues (fig. 63, pl. V).

Le développement de la feuille, dans son ensemble, se fait donc de haut en bas.

Au point de vue phyllotaxique, les feuilles sont disposées suivant un ordre essentiellement distique. Mais presque toujours cette disticité est imparfaite. Nous verrons, en parlant des bulbilles, à quoi est due cette irrégularité.

II. — *ANATOMIE.*

A. — Parcours des faisceaux.

Chaque nervure de la feuille est formée par un seul faisceau unipolaire. Cet énoncé se confirme dans la gaine aussi bien que dans le limbe et dans l'*acumen*. Mais dans la gaine déjà très développée d'une feuille encore complète, il est difficile de suivre rigoureusement le trajet des faisceaux ou, du moins, de mettre en rapport cette partie du trajet avec celle qui se poursuit dans le limbe. En effet, cette gaine présente déjà de grandes dimensions et contient des faisceaux d'un ordre très élevé, lesquels sont reliés par des anastomoses très nombreuses à trajets très irréguliers. Ajouté à cela que la région où la gaine porte les bulbilles est, en outre, parcourue par les faisceaux destinés à se rendre dans ces dernières, et l'on comprendra que tous ces faits sont de nature à compliquer singulièrement le système conducteur de cette partie de la feuille. Aussi, c'est ce qui m'engage à traiter spécialement du parcours des faisceaux dans la gaine d'une feuille complète.

La gaine. — Le nombre des faisceaux que l'on rencontre dans une gaine de feuille complète est déjà assez élevé. Dans l'une de celles que j'ai observées (fig. 2, pl. I), il était de cent trente et un dans la partie la plus large, vers le milieu. Tous ces faisceaux sont loin d'être identiques. Quarante y sont différenciés en bois et en liber, et présentent une orientation normale, c'est-à-dire que dans chacun d'eux le bois regarde la face interne et le liber la face externe de la gaine. Quant aux autres faisceaux, ils sont à l'état de massifs de procambium.

La grosseur et la position des faisceaux fournissent des caractères qui permettent de les distinguer. Cette position semble

des plus irrégulières : Au lieu de se trouver sur un seul rang circulaire, comme on pourrait s'y attendre par la comparaison avec d'autres organes cylindriques ou engainants, ces faisceaux de la gaine sont disposés sur plusieurs rangs : les faisceaux principaux occupent le rang le plus interne, les autres sont d'autant plus relégués vers la face externe qu'ils sont d'ordre plus élevé. Ainsi dans la figure 2, on peut voir que les faisceaux médian, M, et latéraux, LL, sont plus rapprochés du centre que les intermédiaires, *ii*, et que les marginaux, *m m*, ceux-ci que les *i'* et les *m'* et ainsi de suite. Cette disposition, qui trouve probablement sa raison d'être dans l'épaisseur considérable qu'acquiert la gaine, se reconnaît déjà nettement dans une gaine n'ayant pas 3 millimètres de diamètre, appartenant à une feuille jeune dont le limbe est encore réduit à sa plus simple expression; elle s'accentue à mesure que la gaine grandit et s'épaissit, attendu que le nombre des faisceaux d'ordre de plus en plus élevé y va se multipliant; elle persiste même, jusque dans une certaine limite, dans le limbe de la feuille, comme nous le verrons bientôt.

Cette constatation a une valeur qui n'est pas à dédaigner; car plus peut-être que la grosseur, elle est un critérium important pour reconnaître à quelle catégorie appartient un faisceau, et il va de soi que cette position plus ou moins excentrique des faisceaux est liée à une question d'histogenèse. Mais, je me hâte de le dire, cette méthode, dans le cas de l'*Ornithogalum caudatum*, n'est applicable avec certitude que pour la gaine d'une feuille complète ayant à peu près 1 centimètre de diamètre, surtout en ce qui concerne les faisceaux différenciés.

Dans les gaines plus âgées, le nombre des faisceaux est très considérable; on peut l'évaluer en moyenne à quatre cents pour une gaine arrivée au summum de son évolution, c'est-à-dire quand tout le reste de la feuille est flétri, *acumen* et limbe (fig. 3, pl. I : ensemble de la région dorsale, la moins riche en faisceaux représentant $^1/_{10}$ de la circonférence d'une gaine de 20 centimètres de circonférence). Évidemment, on peut défalquer de ce chiffre cent à cent cinquante faisceaux qui peuvent n'être considérés que comme des anastomoses à course longitu-

dinale assez longue. Mais comme ces faisceaux sont reliés eux-mêmes à leurs voisins par des anastomoses plus ou moins obliques, plus courtes, je crois plutôt que ce sont des faisceaux d'ordre très élevé; car je n'ai jamais constaté, dans les autres parties de la feuille, des anastomoses longitudinales reliées à d'autres faisceaux par des anastomoses secondaires. D'ailleurs, la question n'a peut-être pas beaucoup d'importance ici, vu que des trois cents ou deux cent cinquante faisceaux restants, soixante tout au plus se rendent dans le limbe, tous les autres sont propres à la gaine. En effet, à la base d'un limbe en grande partie déjà flétri vers l'extrémité, on trouve cinquante-neuf faisceaux, vingt-neuf de part et d'autre du médian répartis comme il suit :

$m^{V}\,m^{V}\,m^{VI}\,m^{IV}\,m^{V}\,m'''\,m^{IV}\,m''\,m'''\,m'\,m'''\,m''\,m'''\,m\;\; m''\,m'''\,m''''\,m'\,m'''\,m''\,m'''$ L $i''i'i''i\;i''i'i''$

M $i'''i''i'''i'i''i'''i\;i''i'i'''i''i'''$ L $m'''\,m''\,m'''\,m'\,m'''\,m''\,m'''\,m\;\; m''\,m'\,m'''\,m''\,m^{IV}\,m'''\,m^{IV}$ (1).

Les faisceaux propres à la gaine sont, pour la plupart, des m^n et des i^n, n étant plus grand que les exposants des faisceaux parcourant à la fois la gaine et la limbe. On sait, d'ailleurs, que plus élevé est l'ordre d'un faisceau, plus court est son trajet.

Il existe encore dans la gaine âgée un certain nombre de faisceaux qui bien qu'étant mêlés aux faisceaux m^n et semblant être mis en rapport avec eux par des anastomoses, doivent en être absolument distingués. Leur origine, leur orientation et leur destination sont tout à fait différentes. Ce sont des faisceaux qui, virtuellement, n'appartiennent pas à la feuille. En effet, sur une gaine âgée que j'ai choisie à cause de sa simplicité se remarquent, à la face externe presque opposée à la région occupée par le faisceau médian, c'est-à-dire à la face externe de la région située obliquement en dessous du point où la gaine se fend pour former le limbe, deux grosses nervures qui s'élèvent parallèlement depuis l'insertion sur le plateau jusqu'à environ

(1) J'adopte, dans ce travail, une notation conforme à celle proposée par M. le professeur Gravis pour le *Tradescantia* (**15**) et admise ensuite par MM. Gravis et Donceel (**16**), Lenfant (**23**), Mansion (**26**), Sterckx (**49** et **50**), Lonay (**25**) et Goffart (**14**).

$2^{cm},5$. A ce niveau, la gaine porte deux bulbilles situées côte à côte (fig. 4, pl. I). L'étude du parcours des faisceaux dans cette région montre que ces nervures comprennent chacune un système de trois faisceaux longeant de très près l'épiderme externe de la gaine et orientés normalement par rapport au centre de l'espace plus ou moins triangulaire qu'ils circonscrivent; vers le milieu de l'épaisseur de la gaine, il y a, en outre, six à huit faisceaux diversement orientés (fig. 5, pl. I, coupe transversale au-dessous de l'insertion des bulbilles). Arrivés au niveau de l'insertion des deux bulbilles, les faisceaux périphériques sortent de la gaine pour se rendre dans les bulbilles; les six à huit faisceaux profonds continuent vers le haut; mais n'ayant plus de destination par suite de l'avortement de la bulbille dans laquelle ils devaient sortir, ils se terminent bientôt en pointe libre, après s'être divisés (fig. 6, pl. I, coupe transversale de la gaine au-dessus de l'insertion des bulbilles). Tel est un cas des plus simples; il se réalise très rarement; mais il suffit pour nous expliquer la présence dans la gaine de faisceaux qui virtuellement lui sont étrangers et qui, étant destinés aux bulbilles, peuvent recevoir le nom de *faisceaux bulbillaires*. Nous y reviendrons d'ailleurs quand il sera question des bulbilles.

En résumé, la gaine âgée des feuilles d'*Ornithogalum caudatum* renferme de nombreux faisceaux que l'on peut grouper en trois catégories : 1° des faisceaux foliaires principaux qui traversent la gaine et le limbe sans subir de déviation, d'anastomose ou de ramification; 2° des faisceaux d'ordre très élevé dont le parcours ne s'étend pas en dehors des limites de la gaine; 3° des faisceaux bulbillaires.

De tous ces faisceaux, un nombre restreint seulement pénètre dans le plateau. S'il s'agit d'une gaine âgée, on peut l'estimer à cent environ, dans lesquels on comprend les faisceaux bulbillaires — en nombre variant de douze à trente — et les faisceaux foliaires principaux.

Pour une gaine de feuille complète, ce nombre est de quarante-quatre en moyenne. Par rapport au nombre des faisceaux que l'on trouve dans le milieu de cette même gaine, —

cent trente et un, — cette quantité est beaucoup plus grande que dans le cas d'une gaine âgée — cent contre quatre cents. — Cela résulte de ce que la plupart des autres faisceaux s'organisent à l'état de procambium dans la courte région d'accroissement qui se trouve tout à la base de la gaine et qui se confond pour ainsi dire avec le méristème du plateau. Ici, on ne trouve pas encore de trace de bulbille; par conséquent, il n'y a pas lieu de tenir compte des faisceaux bulbillaires. A plus forte raison, ces derniers font défaut également vers le milieu de la hauteur de cette même gaine. Ceci prouve, en outre, que le milieu de la gaine d'une feuille complète, mais relativement jeune, n'est pas le niveau correspondant au milieu de la gaine d'une feuille âgée; ce dernier niveau se trouve encore confondu dans le méristème basilaire de la gaine.

Le limbe. — Nous avons vu que dans le milieu de la gaine d'une feuille complète, il y a quarante faisceaux différenciés; ces quarante plus deux autres qui sont différenciés plus haut pénètrent directement dans le limbe. Donc à la base de celui-ci, qui a un peu plus de 5 centimètres de largeur, le nombre des faisceaux est de quarante-deux répartis comme suit (fig. 7, pl. I) :

$m^{IV}m'''m^{IV}m''m'''m'm''m'''m\ m''m'''m'm'''m''m'''$L $i'i\ i'$

M $i'i\ i'$L $m'''m''m'''m'm'''m''m'''m\ m'''m''m'''m'm'''m^{IV}m''m^{IV}m'''m^{IV}$.

Cette répartition indique une certaine inéquilatéralité, puisque d'un côté de M il y a dix-neuf faisceaux et de l'autre vingt-deux. Cette inéquilatéralité se révèle encore d'une autre façon dans les feuilles ou régions de feuilles où, de part et d'autre de M, le nombre des faisceaux est le même; il suffit, pour s'en convaincre, d'examiner la formule foliaire de la page 15 : à droite de M, les *i* sont plus nombreux qu'à gauche et, réciproquement, à gauche les *m* sont plus nombreux qu'à droite (1). Cette inéquilatéralité que présentent toutes les feuilles est évidemment déterminée par des raisons mécaniques et notamment par la

(1) Les termes « droite » et « gauche » sont déterminés par rapport à l'observateur supposé au centre de la tige mère.

compression que subissent les feuilles au moment de leur formation, compression plus accentuée suivant une des moitiés à cause de la disposition imparfaitement distique des feuilles. Elle est encore une conséquence de ce que, dans toute gaine, un faisceau marginal *m* occupe une position diamétralement opposée à celle du faisceau médian M, et qu'il passe ensuite dans le limbe en suivant l'un des bords. Ce fait, très général dans notre espèce, a été mis en lumière par M. le professeur Gravis, pour le *Tradescantia virginica*, où il semble ne se trouver qu'exceptionnellement (**15**, p. 152).

Plus encore que dans la gaine, la direction parallèle des nervures est apparente dans le limbe. Les faisceaux sont sur un seul rang, bien que ceux d'ordres secondaires soient sensiblement en retrait sur les autres (fig. 7, pl. I). De temps en temps, ils sont reliés entre eux par des anastomoses horizontales ou obliques. A mesure que le limbe se rétrécit vers le sommet, les petits faisceaux se jettent successivement dans ceux d'ordre moins élevé qui en sont le plus rapprochés, et se confondent avec eux.

L'acumen. — C'est ainsi que du limbe dans l'*acumen*, il ne passe que quinze ou seize faisceaux, sans aucune interruption anatomique. Ce sont (fig. 25, pl. III) :

$$m''m'm''m\,m'\mathrm{L}\,i\,\mathrm{M}\,i'i\,i'\mathrm{L}\,m'm\,m'(m'').$$

Ils tendent à s'y disposer en cercle ou plutôt en ellipse. A un certain niveau, au huitième environ de la longueur totale de l'*acumen* à partir du sommet, ils se réduisent à 7, $m\mathrm{L}i\mathrm{M}i\mathrm{L}m$; puis les intermédiaires *i* d'abord et les marginaux *m* après eux, ou bien inversement, suivant les individus, d'abord les *m*, ensuite les *i*, se jettent dans les latéraux et le médian. Enfin, les deux faisceaux latéraux LL, restés seuls pendant quelque temps avec le médian M, se rendent l'un après l'autre dans ce dernier qui se termine librement à une petite distance en dessous du sommet.

Il est à remarquer : 1° que, d'une façon très générale, dans une moitié de feuille, les faisceaux terminent leur course avant les faisceaux correspondants de l'autre moitié; 2° que presque tou-

jours aussi les faisceaux, à part ceux qui longent les bords du limbe, se bifurquent en se terminant et que l'une des branches se rend dans le faisceau le plus proche à droite, tandis que l'autre se jette dans le faisceau qui se trouve à la gauche du faisceau qui disparaît.

Le schéma de la figure 8 (pl. II) donne une vue synoptique du parcours des faisceaux dans une feuille complète. Évidemment, il a fallu raccourcir leur trajet, notamment dans la partie correspondant au limbe comprise entre les niveaux ζ et δ; de plus, pour éviter d'embrouiller le dessin, il a été fait abstraction des nombreuses anastomoses.

B. — Histogenèse.

Bien qu'il soit impossible de rencontrer ici, au début de la formation de la feuille, la simplicité de structure observée dans d'autres plantes, et notamment dans le *Tradescantia* par M. Gravis (**15**, p. 153, pl. XX), il est cependant très probable que le développement des tissus suit une marche analogue dans l'*Ornithogalum caudatum*.

Au premier stade (fig. 9, pl. I : coupe transversale d'une ébauche de feuille), le mésophylle comprend déjà au moins cinq assises cellulaires entre les deux épidermes. Les deux assises extrêmes de ce mésophylle sont composées de cellules sensiblement plus petites que celles des trois assises moyennes, lesquelles constituent certainement le mésophylle moyen, tandis que les assises extrêmes représentent le mésophylle externe et le mésophylle interne.

A un autre stade (fig. 10, pl. I : coupe transversale d'une feuille jeune dont le limbe a un peu moins de 1 centimètre de longueur), le mésophylle externe, par des cloisonnements centrifuges, s'est dédoublé en trois assises, le mésophylle interne s'est recloisonné une fois tangentiellement, tandis que le mésophylle moyen reste formé de trois assises cellulaires.

Tout le développement ultérieur du mésophylle se porte principalement sur le mésophylle moyen; car les mésophylles

externe et interne ne comptent jamais plus de trois ou quatre assises, alors que le mésophylle moyen peut avoir, dans la partie du limbe la plus développée d'une feuille complète, jusqu'à six assises de cellules dont le diamètre s'est considérablement agrandi.

Ces faits s'appliquent au limbe; on pourrait également les rapporter à la gaine, mais en augmentant le coefficient de divisibilité des assises dont le rapport varie surtout en faveur du mésophylle moyen qui est le facteur principal de la tubérisation. En effet, les recherches de M. Gravis (**15**, p. 154, pl. XX) et quelques observations personnelles (**25**, p. 1, fig. 8; pl. IV, fig. 33) semblent avoir établi que les faisceaux libéroligneux n'apparaissent jamais en dehors de cette partie du mésophylle. Or, dans l'épaisseur de la gaine, certains faisceaux ne sont souvent séparés de l'un ou l'autre des épidermes que par cinq assises de cellules (fig. 11, pl. I : coupe transversale d'une gaine âgée; un petit faisceau voisin de l'épiderme externe).

C. — Histologie.

Nous considérerons successivement les caractères des tissus dans le limbe, la gaine et l'*acumen*. J'adopte cet ordre, parce que c'est dans le limbe que les tissus se différencient le plus et que nous éviterons ainsi des répétitions.

1. **Limbe** (fig. 7, pl. I : ensemble de la coupe transversale à la base d'un limbe de feuille complète). — Quarante-deux faisceaux presque équidistants occupent la section; un gros alterne régulièrement avec un plus petit; comme je l'ai dit plus haut, on remarque que plus les faisceaux sont gros, plus ils sont rapprochés de l'épiderme interne. Ils sont plongés dans un parenchyme incolore interposé entre les parenchymes chlorophylliens; ceux-ci tapissent chacun des deux épidermes.

Faisceaux. — Ils sont entourés d'une gaine complète de cellules polygonales sans méats, peu allongées longitudinalement, toutes à parois minces et renfermant, outre le protoplasme et un

noyau, de l'amidon en nombreux grains assez gros. Les faisceaux ne sont jamais accompagnés d'aucun élément sclérifié ou collenchymateux; les plus gros comprennent cinq ou six trachées dont la première est annelée, étroite et ordinairement écrasée; les autres, de plus en plus larges, passent à la formation spiralée (fig. 12, pl. II); les plus petits faisceaux ne possèdent qu'une trachée (fig. 13, pl. I).

Parenchyme incolore. — Il provient entièrement du mésophylle moyen. Bien qu'il ne soit pas nettement limité du parenchyme chlorophyllien, on peut y admettre six à huit assises de cellules dans la partie la plus épaisse de la feuille (fig. 12). En effet, les deux assises extrêmes, touchant aux parenchymes chlorophylliens, renferment toujours quelques corps chlorophylliens dans leurs cellules; les autres sont formées de grandes cellules à parois minces, laissant entre elles des méats ne contenant qu'un peu de protoplasme et beaucoup de suc cellulaire. De ces cellules, les plus grandes peuvent atteindre 217 μ de diamètre; elles vont, en diminuant de volume, du centre à la périphérie. Çà et là se trouvent des cellules très allongées dans le sens longitudinal, renfermant des bottes de raphides, et présentant la même constitution que les cellules à raphides signalées par M. Gravis dans le *Tradescantia virginica* (**15**, p. 129, pl. XXII, fig. 252, 253 et 254). En somme, cette partie du mésophylle est un parenchyme aquifère.

Parenchyme chlorophyllien. — Il est presque exclusivement formé par le mésophylle externe et par le mésophylle interne.

Le parenchyme chlorophyllien externe diffère quelque peu du parenchyme chlorophyllien interne en ce qu'il présente trois assises de cellules au lieu de deux et que l'assise la plus extérieure est un peu palissadique. A part cela, les deux parenchymes sont formés de cellules sphériques, à parois minces et lisses, laissant entre elles des méats triangulaires; on y rencontre aussi quelques cellules très longues, contenant des raphides et du mucilage (fig. 12).

Épidermes. — Les deux épidermes sont très semblables. Ils

sont tous deux aquifères et garnis de stomates. Les cellules en sont très allongées : elles ont à peu près 1 millimètre de longueur sur 49 μ de largeur en moyenne (fig. 14, pl. II); elles renferment du protoplasme réduit à une couche pariétale, un noyau et du suc cellulaire abondant. Les parois externes sont épaisses et formées de deux couches parfaitement reconnaissables sur la coupe transversale; l'intérieure est cellulosique; l'extérieure constitue la cuticule (fig. 12). Celle-ci présente de fortes stries longitudinales bien visibles de face à un grossissement suffisant (fig. 15, pl. I). Les parois latérales et internes sont minces et cellulosiques.

Les stomates sont superficiels; ils ne sont pas accompagnés de cellules annexes. Ils sont simplement formés de deux cellules stomatiques à section arrondie (fig. 30, pl. IV), semi-lunaires, assez arquées, de façon que, vu de face, l'ensemble représente une figure circulaire; ces cellules sont bourrées de corps chlorophylliens (fig. 15, pl. I : un stomate, vu de face, avec les extrémités des cellules épidermiques qui y aboutissent); les chambres sous-stomatiques sont souvent assez étendues. La répartition des stomates est uniforme aux deux faces de la feuille; seulement leur nombre est un peu plus élevé à la face externe qu'à la face interne; sur 5 millimètres carrés, il est à peu près de soixante-trois d'une part contre cinquante-deux de l'autre, vers le milieu de la feuille.

A aucun moment, ni sur aucune partie, on ne trouve de poils.

2. **Gaine.** — Vers le milieu de sa hauteur, la gaine atteint sa plus grande épaisseur; celle-ci, dans la feuille que nous considérons, est, à ce niveau, de $2^{mm},5$ environ; mais dans la gaine adulte, elle est au moins de 5 millimètres. Le mésophylle y est homogène et est parcouru par cent trente et un faisceaux (fig. 2, pl. I), dont le nombre diminue en descendant et en montant dans la gaine.

Faisceaux. — Des cent trente et un faisceaux que comporte la gaine qui nous intéresse, quarante et un sont différenciés en bois et en liber. Les plus gros parmi ces derniers présentent

une douzaine d'éléments ligneux. Dans beaucoup de ces faisceaux, on remarque l'existence d'un arc cambial nettement caractérisé entre le bois et le liber. Néanmoins ce cambium, très fugace, ne donne jamais naissance à des productions ligneuses secondaires (fig. 16, pl. I : un faisceau *m* vers le milieu de la gaine jeune). Les plus petits des faisceaux différenciés sont semblables aux plus petits faisceaux du limbe (fig. 13), n'étant formés, comme eux, que d'une trachée et de quelques éléments libériens.

Quant aux faisceaux non différenciés, au nombre de quatre-vingt-dix, leur région d'occupation se trouve en arrière de celle des faisceaux différenciés. Ils sont à l'état de massifs de procambium d'autant plus petits, généralement, qu'ils sont plus près de l'épiderme externe ou, ce qui revient au même, de la périphérie. Ces plus petits massifs montrent clairement qu'ils proviennent du recloisonnement tardif d'*une* cellule du parenchyme fondamental (fig. 17, pl. II : petit faisceau en voie de formation dans le mésophylle d'une gaine jeune). C'est d'ailleurs de la même façon que débute l'organisation des faisceaux d'ordre secondaire, dans le cas de feuilles ou d'organes appendiculaires quelconques où l'on peut observer facilement les trois assises primordiales du mésophylle, ainsi qu'il résulte des travaux de MM. Gravis (**15**, p. 153, pl. XX), Gravis et Donceel (**16**, pl. IV, fig. 38) et Lonay (**25**, pl. I, fig. 8; pl. XIX, fig. 291).

Parenchyme. — Le parenchyme est homogène en ce sens qu'il est entièrement incolore, formé de cellules arrondies à parois minces, à diamètre sensiblement le même partout et renfermant toutes de l'amidon, sauf aux assises extrêmes où les dimensions diminuent environ de moitié et où le contenu cellulaire se borne au protoplasme et au noyau. Toutes ces cellules, formant en moyenne vingt assises, sont douées d'une vitalité remarquable, qui se trahit par les nombreux recloisonnements qu'elles subissent surtout dans le sens tangentiel.

A cet égard, on peut distinguer trois catégories de tissus dans ce parenchyme :

L'un, appliqué contre l'épiderme interne, est constitué par une assise de cellules qui se cloisonnent activement en direction

centrifuge (1) et produisent ainsi jusqu'à cinq assises de cellules (fig. 18, pl. II); ce tissu correspond au mésophylle interne;

Le deuxième, contre l'épiderme externe, est assez semblable au précédent, mais les cloisonnements s'y succèdent moins activement; ils ne produisent que deux ou trois assises nouvelles qui s'ajoutent à l'ancienne correspondant au mésophylle externe (fig. 19, pl. II);

Le troisième occupe une position intermédiaire entre les deux précédents; il correspond au mésophylle moyen; les cellules s'y recloisonnent isolément, mais plus activement vers la périphérie et dans le sens tangentiel, et contribuent le plus à la tubérisation de la gaine et à la formation des faisceaux tardifs (fig. 17, pl. II).

Cette constitution du parenchyme s'étend à tous les niveaux de la gaine jeune; quand celle-ci atteint ses dimensions définitives, les caractères distinctifs des trois parties du mésophylle s'effacent; l'activité de toutes les cellules se concentre à la formation d'une réserve nutritive sous forme de grains d'amidon, sauf à l'assise la plus extérieure, où apparaissent des corps chlorophylliens, même avant la dénudation de la gaine.

Épidermes. — Les deux épidermes ont tous les caractères d'épidermes jeunes : leurs cellules se divisent activement par des cloisons radiales; c'est dire qu'elles renferment un protoplasme abondant et un noyau actif, que leurs parois sont minces, sauf les parois externes un peu épaissies déjà, mais sans cuticule. Il n'y a pas de stomates (fig. 18 et 19). Ceux-ci d'ailleurs se montrent excessivement rares sur la gaine adulte et n'y existent même que dans le voisinage de la région basilaire. A l'état adulte aussi, les cellules des épidermes de la gaine sont beaucoup plus courtes que dans le limbe; elles n'ont, en moyenne, que 232 μ, soit le quart de la longueur de celles du limbe (fig. 20, pl. II : épiderme externe vu de face); celles de l'épiderme externe ont la cuticule plus épaisse que celles de l'épiderme interne.

(1) Centrifuge par rapport à la feuille, les assises les plus jeunes étant du côté de l'épiderme interne.

3. **Acumen.** — A une certaine distance du sommet, les deux bords du limbe se replient l'un vers l'autre du côté de la face interne, et cela suivant deux lignes longitudinales partageant la largeur du limbe en trois parties sensiblement égales. A mesure que l'on s'élève dans la feuille, trois modifications se produisent simultanément (fig. 21 à 27, pl. III : coupes à des niveaux successifs, établissant le passage du limbe à l'*acumen*) : les deux bords repliés s'appliquent de plus en plus contre la face interne de la partie médiane; ils se rétrécissent de plus en plus, en même temps qu'ils se soudent progressivement avec la partie médiane du limbe, concrescence qui de l'endroit de la plicature gagne peu à peu l'extrême bord; enfin, les caractères chlorophylliens du mésophylle interne s'effacent insensiblement à partir du milieu du limbe vers les bords; finalement, il ne reste plus du côté interne qu'un sinus (fig. 26) qui se comble peu à peu (fig. 27). Naturellement, le nombre des faisceaux diminue en s'élevant et c'est ainsi que s'organise la partie semi-cylindrique de la feuille que j'ai appelée *acumen*.

Il est à remarquer que la disparition des bords ne se fait pas à la même hauteur des deux côtés : les trois modifications décrites ci-dessus s'opèrent un peu plus bas dans l'une des moitiés de la feuille, soit à droite, soit à gauche. Sur douze feuilles que j'ai examinées à cet égard, six avaient le bord plus haut à gauche et six à droite.

Vers la moitié de sa hauteur, une coupe transversale de l'*acumen* (fig. 27) présente la forme d'une ellipse ayant $2^{mm},275$ sur $1^{mm},6$ et montre la structure suivante :

Faisceaux. — Au nombre de quatorze, ils sont disposés, suivant une ellipse, à la périphérie du parenchyme incolore, adossés contre le parenchyme chlorophyllien, le médian se trouvant un peu à côté du passage du petit diamètre de l'ellipse. Leur organisation est la même que dans le limbe.

Parenchyme incolore. — Il est la continuation du parenchyme incolore du limbe auquel est venu s'ajouter le mésophylle interne chlorophyllien du limbe. En effet, les éléments de ce mésophylle, en perdant leur chlorophylle, se sont recloisonnés une ou deux

fois dans le sens tangentiel et sont confondus ainsi que leurs produits avec le parenchyme incolore. Celui-ci, dans l'*acumen*, est formé de grandes cellules isodiamétriques à parois minces qui meurent bientôt et se remplissent d'air. Suivant le plan de symétrie de l'organe, le nombre d'assises de ces cellules est de douze environ.

Parenchyme chlorophyllien. — Il entoure complètement le parenchyme incolore et les faisceaux et il offre absolument la même composition que le parenchyme chlorophyllien externe du limbe : une assise exérieure en palissade et deux assises de cellules arrondies. D'ailleurs, comme ce dernier, dont il n'est que la continuation vers le haut, il provient entièrement du mésophylle externe.

Épiderme. — De même que le parenchyme chlorophyllien a la même origine que le parenchyme chlorophyllien externe du limbe, l'épiderme de l'*acumen* est génétiquement le même que l'épiderme externe du limbe et présente la même organisation que lui.

Historique.

Développement. — A la page 12, je disais que le développement de la feuille, dans son ensemble, se fait de haut en bas, Je résumais ainsi l'ordre d'apparition des diverses parties de la feuille : l'*acumen* s'organise d'abord, puis le limbe, finalement la gaine. Mais ces trois parties ainsi formées sont susceptibles par la suite d'accroissement intercalaire propre à chacune et lequel cesse dans le même ordre.

Ce serait ici le lieu de rappeler les arguments qui ont fourni la matière aux nombreuses controverses qu'ont suscitées les divers modes d'accroissement des feuilles entre les botanistes éminents du siècle dernier et notamment entre A.-P. de Candolle (5, t. I, p. 354), Steinheil (48), de Mohl (33), A. de Jussieu (20), Naudin (36), Mercklin (27) et Trécul (54). Mais cela entraînerait trop loin. Il suffira de noter que les recherches organogéniques de ce dernier auteur, faites avec soin

sur de nombreuses feuilles de plantes monocotylées et dicotylées, l'ont amené à distinguer quatre modes principaux de formation : basifuge, basipète, mixte et parallèle. Bien qu'acceptée par la plupart des botanistes jusqu'en ces derniers temps, la valeur de cette distinction peut être discutée; je me bornerai ici à renvoyer le lecteur à la page 164 du mémoire de M. A. Gravis sur le *Tradescantia virginica* (**15**). Avec ce savant professeur, je ne vois pas la nécessité de maintenir comme typique le mode de formation parallèle de Trécul. Cette opinion, émise d'ailleurs antérieurement déjà par M. Goebel (**13**, p. 227) et par M. Van Tieghem (**57**, p. 860), me semble d'autant plus plausible dans le cas spécial qui m'occupe, qu'à la page 247 de son travail, Trécul ajoute une note (1) qui contient implicitement une contradiction à ses conclusions et me justifie pleinement quand je dis que la feuille d'*Ornithogalum caudatum* appartient à la formation basipète.

Tissus générateurs. — On sait que l'un des caractères qui distinguent les Monocotylées repose sur l'absence de tissus libéroligneux secondaires provenant de l'activité génératrice d'un cambium qui s'établit entre le bois et le liber primaires des faisceaux, d'où l'opinion généralement reçue que le cambium fait défaut chez ces plantes. Je viens de montrer (p. 22) qu'à un certain moment, les gaines charnues des feuilles de notre plante renferment des faisceaux où les cloisonnements cambiaux sont très caractéristiques. Ce n'est que la confirmation des mêmes faits énoncés par Moebius (**32**) au sujet d'Orchidées indigènes, par Godfrin (**12**, pl. III, fig. 43) pour le *Latania borbonica*, par Mlle S. Andersson (**1**, pp. 585 et 618) pour diverses Monocotylées, par Nægeli (**34**, p. 19) pour le *Chamaedorea elatior* et par M. Gravis (**15**, p. 113) pour le *Tradescantia*. M. Queva, cité par MM. Gravis et Donceel (**16**, p. 49, note 2), a fait des observations analogues en 1894 dans les Dioscorées et les Liliacées, et plus récemment encore, ce même auteur (**37**, p. 446) a

(1) « Dans la *formation basipète,* les parties du limbe seules se forment de haut en bas, car la gaine les précède ordinairement quand la feuille en est munie. » (Trécul [**38**, p. 247 en note].)

trouvé, dans les faisceaux des tubercules de *Gloriosa superba* de véritables productions libéroligneuses secondaires, d'où il conclut que les Monocotylées dériveraient de Dicotylées inférieures.

L'apparition des faisceaux tardifs dans le parenchyme fondamental de la gaine n'est pas sans présenter quelque analogie avec celle des faisceaux dont Millardet (**28**) a observé le développement dans les tiges de *Yucca* et de *Dracoena*. Millardet, il est vrai, a donné une interprétation assez erronée en nommant cambium le tissu générateur à cloisonnements tangentiels dont ils proviennent et en les considérant comme constituant du bois secondaire. Röseler (**39**), ayant porté ses études sur les *Yucca*, *Dracoena*, *Aloe* et *Cordyline*, a mieux déterminé la nature du tissu générateur périphérique. Il rejette d'abord l'analogie qu'on a voulu établir entre ce tissu et le cambium; il dit notamment à la page 315 : « Zellen, welche, unbegrenzt theilungsfähig, abwechselnd Holz und Rinde bilden, also Initialen wie bei den Laub- und Nadelhölzern, sind im Verdickungsringe von Yucca, Aloë und Dracaena nicht vorhanden ». Il insiste encore sur ce point en disant à la page 317 : « Natürlich ist hier der Begriff Mutterzelle in einem anderen Sinne zu verstehen als in der Zusammensetzung « Cambiummutterzelle » (= Initiale) ». Ayant établi ces points, il n'énonce, à la page 328, sa manière de voir au sujet de la zone génératrice circulaire qu'il appelle jusqu'à cet endroit « Verdickungsring », que d'une façon détournée, au moyen d'un pronom : « Wir hätten somit gewissermaassen ein Meristem in jeder Anlage, welches vielleicht in ähnlicher Weise, wie **das** unseres Verdickungsringes, nach innen die das Gefässbündel bildende Elemente abscheidet... » Dès ce moment, il emploie plusieurs fois le terme « Meristemring » (pp. 330 et 342) pour nommer cette zone génératrice que, plus récemment, M. le professeur Gravis a désignée par le terme « périméristème » (**15**, p. 121) proposé par Guillaud (**17**).

Bien que dans la gaine des feuilles d'*Ornithogalum caudatum* il n'existe pas d'assise génératrice franchement délimitée, il se produit, dans le cours du développement de cet organe, de nombreux cloisonnements tangentiels dans les cellules à la

périphérie du tissu fondamental moyen; c'est de certains de ces cloisonnements que procèdent les faisceaux libéroligneux tardifs, et ce de la même manière que les prétendus « faisceaux de bois secondaire » de Millardet ou que les « secundären Gefässbündel de Röseler (cf. ma figure 17, pl. II, avec les figures 8 et 14 de Millardet et la figure 13 de Röseler).

On peut donc, semble-t-il, affirmer qu'il se manifeste dans la gaine foliaire de l'*Ornithogalum caudatum* un accroissement diamétral assez considérable avec production de parenchyme et de faisceaux libéroligneux tardifs; ces tissus prennent naissance par un mécanisme en tout comparable à celui d'un périméristème. De plus, il est à noter que les faisceaux tardifs dont il s'agit sont propres à la gaine, comme, dans la tige de *Dracoena*, les faisceaux issus du périméristème sont propres à la tige.

Au sujet du contenu des cellules épidermiques, mon attention fut attirée sur une communication de Schenk (44) dans laquelle ce savant signale l'existence, dans les cellules épidermiques de la hampe, des feuilles, des bractées, des pièces du périanthe et des carpelles de plusieurs espèces d'*Ornithogalum*, d'amidon amorphe en solution dans le suc cellulaire et colorable par la teinture d'iode, comme l'amidon solide, en violet ou en indigo. Dans certaines espèces, la coloration s'obtient très rapidement; dans d'autres, telle que l'*O. longebracteatum* Jacq., il faut plusieurs heures avant qu'elle se manifeste; dans les *O. Ecklonianum, comosum* et *umbellatum*, elle ne s'est jamais produite. Pour mener à bien les expériences, il faut, d'après cet auteur, récolter les matériaux avant ou pendant l'époque de la floraison; après on n'obtient aucun résultat. Mais dans une seconde communication, Schenk (45) se rétracte et fait toutes ses réserves quant à l'existence de l'amidon amorphe dans les *Ornithogalum*, tout en admettant la possibilité qu'il s'agit d'un isomère de l'amidon, se basant, pour conclure ainsi, sur ce que dans l'eau la coloration caractéristique de l'amidon disparaît. Nægeli (35) a démontré le non-fondé de cet argument et a établi que l'on a bien affaire là à une variété amorphe ou dissoute de l'amidon. Pour ma part, tout en suivant la technique

indiquée par ces auteurs, j'ai vainement tenté de provoquer la coloration violette par l'action de l'iode sur le contenu des cellules épidermiques prises en des endroits bien divers et sur plusieurs individus de l'*Ornithogalum caudatum*. Sans doute, cette espèce doit être rangée parmi celles où l'amidon dissous fait défaut, à moins que, chose peu probable, les conditions de culture assez uniformes pour les individus dont j'ai pu disposer n'exercent une certaine influence sur le phénomène en question.

§ 2. — LES BRACTÉES.

I. — *CARACTÈRES EXTÉRIEURS.*

A l'extrémité d'une hampe de 1 mètre à 1^{m},50 de longueur, cylindrique, lisse et nue, s'élève une grappe de fleurs longue de 15 à 35 centimètres. Chaque fleur est insérée à l'aisselle d'une bractée. Les bractées sont sessiles sans être engainantes, lancéolées et longues de 2 centimètres ; elles se dégagent d'abord perpendiculairement à l'axe, mais se redressent bientôt verticalement ; elles sont vertes et atteignent leur maximum de développement un peu avant l'épanouissement des fleurs qui leur correspondent. Quand celui-ci a lieu, la bractée commence à se flétrir ; elle devient brunâtre, se dessèche et tombe bientôt. Ce sont donc simplement des organes de protection pour les boutons floraux.

II. — *ANATOMIE.*

A. — Parcours des faisceaux.

La bractée reçoit trois faisceaux : un faisceau médian M et deux latéraux L. Tous trois courent parallèlement dans l'organe, sans se relier jamais au moyen d'anastomoses et se terminent en pointe libre ; le M, après avoir parcouru presque toute la longueur de la bractée, s'arrête à environ 1 millimètre du sommet

de celle-ci ; le trajet des deux latéraux L s'arrête en deçà de la moitié de la longueur de l'organe et est plus court pour l'un que pour l'autre (fig. 28, pl. II : une bractée entière).

Parfois un quatrième faisceau *m* pénètre dans la bractée parallèlement aux trois autres ; mais il n'y parcourt qu'une distance qui n'excède pas 1 à $1^{mm},5$; il se trouve toujours entre le bord et le faisceau latéral le plus long, qui peut être tantôt à droite, tantôt à gauche du médian dans les différentes bractées.

B. — Histologie.

Faisceaux. — Ils présentent la même structure que ceux de la feuille végétative et plus particulièrement que les petits faisceaux. Ainsi le faisceau M ne comprend que quatre ou cinq petites trachées étroites (fig. 30, pl. IV), la plupart annelées ; l'un des faisceaux L n'a qu'une trachée ; le plus long peut en avoir deux ou trois.

Parenchyme. — Il est entièrement chlorophyllien ; néanmoins, il provient également de trois mésophylles. Le mésophylle moyen ne donne qu'une assise de cellules dans toute l'étendue de l'organe ; ces cellules sont grandes, et plusieurs d'entre elles ne renferment que du mucilage et des raphides. Le mésophylle interne ne produit que deux assises et le mésophylle externe trois assises de cellules plus petites (fig. 29, pl. III : coupe transversale à la base de la bractée). Vers la base de la bractée, on trouve également quelques rares cellules à raphides dans ces deux mésophylles ; vers le sommet, le mésophylle externe se réduit à deux (fig. 30), puis à une assise de cellules (fig. 32, pl. IV).

Épidermes. — Ils offrent les mêmes caractères que dans la feuille végétative, sauf que vers la base de l'organe, la cuticule est relativement très épaisse et remarquable par les stries, particulièrement très prononcées à l'épiderme interne, dont elle est sillonnée (fig. 29). Les deux bords de la bractée sont presque exclusivement constitués par les deux épidermes accolés, et l'on remarque que l'un d'eux, plus prononcé, celui qui se trouve du

côté de la bractée parcouru par le faisceau L le plus long, a une tendance à se replier contre la face interne, dernier vestige de la formation d'un *acumen* (fig. 30, 31, 32, pl. IV : coupes transversales à des niveaux de plus en plus rapprochés du sommet de la bractée); celui-ci existe donc réellement, mais ne parvient pas à se caractériser bien nettement.

Des stomates sont répartis également sur les deux faces des bractées.

CHAPITRE II

LES PLANTULES.

Dans la plantule, le cotylédon et les feuilles suivantes sont disposés en ordre distique imparfait (fig. 35, pl. III).

Nous étudierons successivement le cotylédon et les premières feuilles d'une plantule.

§ 1. — LE COTYLÉDON.

I. — *CARACTÈRES EXTÉRIEURS.*

Le cotylédon comprend trois régions : la gaine, le limbe et l'*acumen* (fig. 34, pl. III).

Au début de la germination, la gaine a la forme d'un cylindre creux et présente une petite ouverture longitudinale qui est la fente cotylédonnaire. L'*acumen* est cylindrique, plein et courbé à 180° (fig. 33, pl. III); son extrémité, très effilée, reste emprisonnée dans l'albumen et remplit les fonctions de suçoir. Quant au limbe du cotylédon, il ne semble représenté que par une région extrêmement courte, comprise entre la gaine et l'*acumen* au niveau de la fente cotylédonnaire.

Pendant la première période de l'accroissement du cotylédon, la gaine, en devenant charnue, se renfle jusqu'à atteindre la grosseur d'un pois; la fente cotylédonnaire s'élargit de façon à donner passage aux premières feuilles de la plantule, mais elle ne s'allonge guère, de sorte que la région que je considère comme homologue du limbe reste toujours extrêmement courte; le limbe cotylédonnaire ne s'aplanit pas; ses bords, qui ne sont autres que les bords de la fente cotylédonnaire, restent toujours assez rapprochés (fig. 36, pl. IV). Quand le cotylédon atteint 6 à 8 centimètres de longueur, l'*acumen* redresse son extrémité

en entraînant souvent encore le spermoderme presque vide, et il devient droit tandis qu'il continue de s'allonger. Pendant ce temps, le spermoderme se vide complètement, tombe en laissant à nu le suçoir qui se flétrit aussitôt. Finalement le cotylédon peut acquérir une longueur de 8 à 9 centimètres (fig. 34, pl. III).

II. — *ANATOMIE.*

A. — Parcours des faisceaux.

L'hypocotyle, très court, envoie dans le cotylédon huit faisceaux :

$$m''m'm\,\mathrm{L}\,\mathrm{M}\,\mathrm{L}\,m\,m'.$$

Le faisceau M occupe, normalement, le milieu du cotylédon; il est opposé au faisceau M^1 de la feuille 1 de la plantule. Ce faisceau M du cotylédon est loin d'avoir l'importance de son correspondant dans la feuille végétative : il n'est même guère plus important que le faisceau m'' qui se trouve en face de lui dans la gaine (fig. 35, pl. III). Le faisceau m'' disparaît le premier en se jetant dans le faisceau m' de gauche, et cela un peu avant d'arriver au niveau de la fente cotylédonnaire qui se trouve au-dessus de lui dans le même plan vertical. A son tour, le faisceau M se jette dans le latéral L de gauche. Plus haut encore, avant la disparition complète des bords du limbe, les m' et les m qui s'y trouvent engagés se jettent les premiers dans les derniers et ceux-ci dans les L qui leur sont contigus. On arrive ainsi dans l'*acumen* parfaitement cylindrique du cotylédon. Les faisceaux L parcourent l'*acumen* dans toute sa longueur en restant parallèles et en tournant l'un vers l'autre leur coin ligneux (fig. 37, pl. IV); ils se prolongent dans le suçoir et ne s'y terminent qu'à l'extrême sommet, en se réunissant par quelques trachées courtes (fig. 39, pl. IV).

Aucune anastomose ne s'observe entre les faisceaux qui parcourent le cotylédon, et seuls les faisceaux L produisent, au niveau du plus grand diamètre de la gaine, chacun une ramification à trajet court qui conflue de nouveau avec le faisceau dont elle est

issue. Cependant, ces ramifications occupent, pendant un certain temps, une place correspondant à celle qui distingue les faisceaux intermédiaires *i* dans les feuilles (fig. 40, pl. IV : parcours des faisceaux).

En somme, les faisceaux L sont les plus importants du cotylédon. On peut rapprocher ce fait de la tendance que montrent ces mêmes faisceaux dans la préfeuille à supplanter le faisceau M.

B. — Histologie.

Histologiquement, le cotylédon ne diffère guère des feuilles. Les faisceaux ont la même composition. Avant son renflement, on reconnaît parfaitement dans la gaine un épiderme interne, un parenchyme et un épiderme externe. A ce stade aussi (alors que la feuille 1 n'est encore qu'un mamelon), on peut observer que les diverses régions du cotylédon, gaine, limbe et *acumen*, passent de l'une à l'autre suivant le mode décrit pour la feuille végétative. De même, on peut assister, plus tard, à l'hypertrophie modérée, il est vrai, du parenchyme de la gaine, laquelle se fait comme dans la feuille végétative; on peut en conclure que ce parenchyme est formé par trois mésophylles distincts; ce parenchyme ne renferme jamais beaucoup d'amidon. Mais bientôt, par suite du développement et de l'épaississement de la gaine de la feuille 1, les tissus internes de la gaine du cotylédon (épiderme interne, mésophylles interne et moyen) sont écrasés, distendus et difficiles à reconnaître (fig. 41, pl. IV).

Les épidermes externe et interne de la gaine cotylédonnaire ne présentent pas de stomates.

L'*acumen* offre la même structure que dans la feuille végétative; mais il est plus cylindrique et ne renferme que les deux faisceaux LL (fig. 37, pl. IV). Des stomates garnissent son épiderme.

Quant au suçoir, il est droit et long de 2 à 4 millimètres; les cellules épidermiques n'y ont pas la forme papilleuse, comme dans beaucoup d'autres organes similaires; mais la paroi externe est mince et sans cuticule (fig. 39, pl. IV).

Comme particularités marquantes, il convient de signaler que, dans toute la longueur du cotylédon, l'épiderme externe, dans sa région médiane, forme un repli assez profond qui provoque l'interruption, en cet endroit, du mésophylle externe chlorophyllien. Les cellules épidermiques externes, situées dans le voisinage de ce repli, sont souvent recloisonnées (fig. 38, pl. III).

De même, dans la gaine, à la région située à l'opposite de celle dont il vient d'être question, l'épiderme externe offre la disposition que représente la figure 41. Il est à remarquer que cette disposition ne s'étend pas depuis la base jusqu'à la fente cotylédonnaire; du moins l'examen de coupes transversales successives et de coupes tangentielles ne m'a pas permis de l'observer comme telle; elle n'atteint pas, loin de là, les deux niveaux extrêmes de la gaine cotylédonnaire.

Existe-t-il une corrélation entre ces faits? Les données actuelles ne permettent pas de résoudre cette question. Il y aurait sans doute lieu de l'approfondir, notamment au point de vue de la valeur morphologique du cotylédon unique des Monocotylées (1).

§ 2. — LES PREMIÈRES FEUILLES DE LA PLANTULE.

Peu après le redressement du cotylédon, on voit poindre par la fente cotylédonnaire le sommet de la feuille 1; celle-ci s'al-

(1) Au moment de livrer le présent travail à l'impression, j'ai pris connaissance d'une notice de Miss Ethel Sargant (**43**, p. 107). L'auteur y traite la question en se basant sur l'examen comparatif du parcours des faisceaux dans les plantules de l'*Anemarrhena* et de l'*Eranthis*, et conclut au caractère dicotylé ancestral des Monocotylées.

A ce sujet, on voudra bien remarquer que le faisceau que j'ai désigné ici comme médian cotylédonnaire M ne présente pas tous les caractères ordinaires d'un faisceau médian; il n'est pas le plus gros, ni le plus long, comme on le voit dans la figure 40. Si le cotylédon des Monocotylées est réellement constitué par deux cotylédons concrescents, les faisceaux désignés ici par L sont en réalité les médians de ces deux cotylédons, et le petit faisceau entre les deux, qui a été dénommé M, proviendrait de la fusion de deux marginaux (*m*).

longe assez rapidement (fig. 34, pl. III), et quand elle a acquis une certaine taille, elle laisse à son tour sortir, par une fente semblable à celle du cotylédon, la feuille 2; celle-ci en agit de même et ainsi de suite.

I. — *CARACTÈRES EXTÉRIEURS.*

A part qu'elles ne portent pas de suçoir, les premières feuilles d'une plantule montrent extérieurement tout à fait le même aspect que le cotylédon; seulement l'*acumen* est plus long. Le limbe y est tout aussi insignifiant, n'étant pas atteint par l'accroissement intercalaire. Ce n'est qu'après la troisième feuille que celui-ci se fait sentir d'une façon notable dans cette région, qui alors prend de plus en plus d'importance. Les gaines des feuilles successives acquièrent une épaisseur définitive graduellement plus considérable, tandis que celles des organes les plus extérieurs s'exfolient les unes après les autres.

II. — *ANATOMIE.*

Les caractères anatomiques sont très semblables dans les premières feuilles de la plantule. Aussi me bornerai-je à fournir quelques détails au sujet de la feuille 2.

A. — Parcours des faisceaux.

Toutes choses égales d'ailleurs, le parcours des faisceaux présentent les mêmes traits essentiels que dans la feuille végétative. Au niveau du plus grand diamètre de la gaine de la feuille 2, celle-ci comprend dix-huit faisceaux :

*m'm m'*L *i'i i'*M *i'i i'*L *m''m'm''m m''m'*.

On remarque déjà ici la prédominance de l'une des moitiés de la feuille sur l'autre. Cette prédominance se manifeste aussi dans le trajet des faisceaux. Seuls les faisceaux LML*m* pénètrent dans la tige; les autres, à l'état de procambium, n'y entrent pas. La

plupart de ces faisceaux ont d'ailleurs un trajet limité à la gaine ou tout au plus ne dépassent pas le court limbe. Sept seulement passent dans l'*acumen :* ce sont *m*L*i*M*i*L*m*. Enfin dans le quart terminal se prolongent les LML; le L de gauche d'abord, puis le L de droite se jettent dans M qui ne les dépasse pas longtemps. La figure 42, planche IV, résume l'énoncé de ce parcours.

Dans la feuille 1, les faisceaux sont moins nombreux et quatre seulement parviennent dans l'*acumen*, LML*m*, le *m* disparaissant bientôt.

B. — Histologie.

Le parcours et l'importance relative des faisceaux, dans les différentes régions, l'absence de suçoir et des particularités mentionnées au sujet de l'épiderme externe du cotylédon, la présence de faisceaux d'ordre élevé dans la gaine, l'abondance plus grande de l'amidon dans le parenchyme de la gaine sont autant de caractères qui distinguent les premières feuilles du cotylédon et qui les rapprochent des feuilles végétatives ; mais pour ce qui concerne l'exiguïté du limbe et le mode de disparition de ses bords, on les retrouve tels que les montre le cotylédon.

Si l'on y ajoute le petit nombre de faisceaux qui parcourent les premières feuilles de la plantule, on est autorisé à dire que celles-ci forment une transition entre le cotylédon et les feuilles végétatives.

Historique.

La germination de la graine et le premier développement de la plantule de l'*Ornithogalum caudatum* se font de la même manière que chez les *Allium* (*A. cepa*, *A. porrum*) où ces phénomènes ont été si souvent décrits et figurés par Mirbel (**29**, p. 60, pl. III, fig. 30; **30**, pl. II ; **31**, p. 71), Gaudichaud (**10**, pl. V, fig. 13), Richard (**38**, pp. 223 et 248, pl. V, fig. 11), Duvernoy (**8**, p. 5), Schleiden (**46**, II. Bd, p. 210), Sachs (**40**, pl. III, et **41**, p. 744), Schubert (**47**, I. Bd, p. 131), Van Tieghem (**56**, p. 271 ; **57**, p. 944) et Tschirch (**53**, pl. XXV, fig. 77). D'ailleurs Mirbel figure très bien (**30**, pl. II) et décrit même en

partie (**31**, p. 63) l'embryon et la germination de l'*Ornithogalum longibracteatum* Jacq., espèce très voisine de la nôtre.

Il en résulte que Klebs (**21**, p. 574) s'est, à bon droit, cru autorisé à ranger les plantules d'*O. longibracteatum* avec celles de l'*Allium* dans le cinquième type monocotylé, caractérisé par une racine principale prenant un grand développement lors de la germination et par un cotylédon long, filiforme, se produisant au-dessus du sol, après l'épuisement de l'albumen, avec les caractères d'une première feuille végétative. Notre espèce, évidemment, rentre aussi dans ce type.

En ce qui concerne les trois parties du cotylédon admises par M. Van Tieghem (**56**, p. 271), une gaine inférieure, un limbe et une gaine supérieure, je suis porté à partager l'avis exprimé par M. le professeur Gravis (**15**, p. 42), rejetant la notion d'une « gaine supérieure ». Celle-ci, non seulement n'existe pas dans l'embryon avant la germination, mais n'apparaît jamais dans un grand nombre et peut-être dans la majorité des Monocotylées. M. Van Tieghem a cru pouvoir établir des distinctions basées sur le nombre des faisceaux cotylédonnaires. Je ne pense pas, toutefois, que l'éminent botaniste français ait voulu en tirer un caractère phyllétique ; car si l'on admettait cette manière de voir, l'*Ornithogalum caudatum* serait notablement différent des genres *Allium*, *Lilium* et *Asphodelus*, chez lesquels le cotylédon ne reçoit que deux ou trois faisceaux parfois même fusionnés. Mais je ne crois pas que le *nombre* des faisceaux puisse caractériser des types de structure ; car nous savons que ce nombre est souvent très variable dans les organes homologues d'une même plante, par exemple dans les feuilles étagées le long d'une même tige, dans les entrenœuds successifs d'un même axe, etc.

Ebeling (**9**), Lewin (**24**) et Tschirch (**53**) ont étudié plus spécialement l'organisation du suçoir dans diverses espèces. Le premier cite l'*Ornithogalum altissimum* comme ayant le même suçoir droit, en forme de cheville, que le *Lilium bulbiferum* également décrit et figuré par Tschirch (pl. XXV, fig. 76) ; le suçoir de notre espèce peut aussi y être assimilé.

CHAPITRE III

LES POUSSES AXILLAIRES VÉGÉTATIVES.

Comme pousses axillaires végétatives, nous envisagerons celles qui s'implantent sur le plateau même, à l'aisselle des feuilles végétatives étudiées au premier chapitre. Généralement, ces pousses axillaires ne parviennent pas à sortir d'entre les gaines trop serrées du bulbe; entravées dans leur premier développement, elles meurent et pourrissent avant de voir le jour; mais il arrive parfois qu'une et même deux se développent dans un bulbe. Ces pousses sont composées de plusieurs feuilles, dont la première, enveloppant toutes les autres, présente quelques caractères particuliers et porte le nom de préfeuille.

I. — *CARACTÈRES EXTÉRIEURS DE LA PRÉFEUILLE ET DES FEUILLES SUIVANTES.*

Dans la préfeuille, on retrouve les trois régions que comporte la feuille végétative, mais avec des proportions bien différentes. La plus longue qu'il m'a été donné d'observer (fig. 43, pl. IV) avait 40 centimètres de longueur totale. Sa gaine était longue de $1^{cm},5$, sans aucune apparence de tubérisation; elle présentait la forme d'un cylindre creux un peu comprimé, avec deux saillies longitudinales, l'une à droite et l'autre à gauche du plan de symétrie.

Le limbe occupe presque tout le reste de la longueur de la préfeuille; il est bicaréné dans toute son étendue et les carènes font fortement saillie à la face externe; ces saillies prolongent celles de la gaine. Dans la partie la plus large, la préfeuille a 17 millimètres de largeur.

Quant à l'*acumen*, il n'est long que de 2 ou 3 millimètres; il

est très aplati, obtus, et constitue une sorte de chape à l'extrémité de la préfeuille.

Dans la feuille suivante ou feuille 2, longue de 45 centimètres, la gaine n'a plus que 2 millimètres; on n'y voit plus de saillie, mais elle est cependant plus épaisse dans les régions occupées par les faisceaux L. Le limbe, aussi large que celui de la préfeuille, présente également deux carènes, mais peu saillantes. Enfin, l'*acumen*, long de 1 centimètre, est plus épais et aussi plus effilé (fig. 44, pl. IV : extrémité de la feuille 2).

Ces caractères s'accentuent dans les feuilles 3, 4, ..., où l'on ne trouve même plus de trace de gaine, mais où, par contre, l'*acumen* devient de plus en plus long, plus effilé et plus cylindrique.

La présence de carènes aux feuilles 2, 3, 4, ... du bourgeon axillaire s'explique par le fait de la pression antéro-postérieure considérable que subissent ces organes pendant la majeure partie de leur développement entre les gaines si serrées du bulbe. Chez d'autres Monocotylées, cette pression se fait moins sentir dans les bourgeons axillaires des tiges aériennes, et c'est pourquoi, dans ces cas, la préfeuille seule est bicarénée.

Pour ce qui regarde la gaine, il convient d'observer que les feuilles ..., 4, 3 et même 2 n'ont pas atteint leur croissance définitive. Il se pourrait que, par suite de l'accroissement basilaire, la gaine fût à même de s'organiser plus tard; il serait même permis de supposer que ces futures gaines devinssent charnues de façon à constituer ultérieurement un bulbe. Malheureusement, la rareté de ces bourgeons axillaires ne m'a pas donné l'occasion de récolter des matériaux suffisants pour élucider ces questions, et il serait téméraire de conclure prématurément. Cependant, ayant pu, dans d'autres parties telles que les bulbes jeunes et les bulbilles, constater que les feuilles les plus jeunes, situées au cœur de ces organes et n'ayant que quelques millimètres de longueur encore, présentent déjà, parfaitement constituées, les trois régions décrites dans la feuille végétative (fig. 61, pl. V), je tiens pour éminemment probable que la gaine fait toujours défaut dans des feuilles où l'on n'en voit pas de trace quand elles

ont plusieurs centimètres, voire même plusieurs décimètres de longueur; il en résulte qu'il faut écarter l'idée de la formation ultérieure d'un bulbe.

Pour les motifs que je viens d'exposer, je n'ai pu déterminer le sort réservé aux pousses axillaires végétatives. Peut-être sont-elles destinées à fleurir l'année suivante.

II. — *ANATOMIE DE LA PRÉFEUILLE ET DES FEUILLES SUIVANTES.*

A. — Parcours des faisceaux.

Dans la préfeuille, le parcours des faisceaux présente essentiellement la même allure que dans la feuille végétative. Ici aussi, la gaine présente, tout au moins dans sa partie inférieure, un certain nombre de faisceaux qui n'en sortent pas à côté des faisceaux qui se continuent dans le limbe. Ceux-ci sont à vingt-huit à la base de la gaine; les autres propres à la gaine sont à trente-trois, ce qui porte à soixante et un le nombre des faisceaux différenciés ou non que l'on peut y compter (fig. 45, pl. IV : coupe transversale à la base de la gaine). Tout en haut de la gaine, il y a trente-deux faisceaux, tous destinés à se rendre dans le limbe (fig. 46, pl. IV). Dans toute la longueur de la gaine, les faisceaux latéraux L longent les deux saillies longitudinales; le faisceau M occupe une position intermédiaire. Ces situations respectives sont maintenues dans le limbe, ce que l'on peut prévoir si l'on se rappelle que les saillies de la gaine ne sont autre chose que les bases des carènes.

Il en résulte que le limbe, à part la présence des saillies carénales, où les faisceaux L sont accompagnés d'un faisceau m'', parfois d'un i', offre le même parcours que celui de la feuille végétative, les faisceaux étant à peu près également répartis à droite et à gauche du faisceau médian M. Ce dernier, contrairement à ce qui a généralement lieu, n'est pas aussi gros que les faisceaux L. Ce fait n'a rien d'étonnant, étant données les condi-

tions spéciales dans lesquelles se développe la partie de la feuille comprise entre les deux carènes, comprimée qu'elle est entre la tige mère ou ses dépendances et le bourgeon qu'elle enveloppe (fig. 47, 48, 49, 50, 51 et 52, pl. V : coupes transversales dans la préfeuille, faites à différents niveaux à partir de la base du limbe jusqu'au sommet).

La caractéristique principale du parcours des faisceaux dans la préfeuille réside dans la façon dont se terminent les faisceaux qui arrivent jusqu'à l'*acumen*. Jusqu'ici les quelques faisceaux m^n qui se sont succédé aux extrêmes bords du limbe se jetaient dans les faisceaux m^{n-1} contigus, ainsi que cela se pratique, en général, dans les feuilles végétatives. Le court *acumen* de la préfeuille débute pour ainsi dire par la terminaison en pointe libre de deux faisceaux m''; bientôt après disparaissent de la même façon deux faisceaux m' extérieurs, puis les deux m et, en même temps que ces derniers, s'évanouissent toujours de la même manière les faisceaux *i* et L de droite; aussitôt après, les faisceaux M, L et *i* de gauche se confondent en une masse terminale de trachées courtes situées en dessous du sommet très obtus de l'*acumen* (fig. 53, pl. V : parcours des faisceaux dans le sommet du limbe de la préfeuille).

Ici encore, une des moitiés de la préfeuille est en avance sur l'autre quant aux phénomènes d'apparition et surtout de disparition des faisceaux.

Dans la feuille 2, sauf en ce qui concerne la gaine pour ainsi dire absente, le trajet des faisceaux se fait suivant le mode décrit pour la feuille végétative; remarquons cependant que les terminaisons des faisceaux à l'extrême sommet se succèdent beaucoup plus rapidement ici et que le faisceau M ne dépasse que très peu les faisceaux L à l'état solitaire (fig. 54, pl. IV : parcours des faisceaux dans l'*acumen* de la feuille 2).

Les feuilles 3, 4, ... réduites au limbe et à l'*acumen*, ont, pour ces parties, un parcours de plus en plus similaire à celui de la feuille végétative.

B. — Histologie.

Les différents tissus qui composent la préfeuille et les feuilles suivantes de la pousse axillaire sont les mêmes et se comportent de la même façon que ceux de la feuille végétative. Certes, il est évident que l'organisation différente des régions comparables de part et d'autre entraîne des différences dans l'état définitif des tissus que ces régions comprennent. Ainsi, le mésophylle moyen de la gaine de la préfeuille présente à peu près le même nombre d'assises que dans le limbe; il n'est pas hypertrophié. Les cellules n'y renferment que peu d'amidon. En revanche, la proportion des cellules à raphides y est beaucoup plus considérable que dans la gaine tubérisée de la feuille végétative.

Le limbe de la préfeuille présente cette particularité, que les faisceaux latéraux L se sont surtout développés dans le sens antéro-postérieur en restant très étroits; les éléments ligneux sont tous disposés en une seule file (fig. 55, pl. IV : un faisceau L dans le milieu du limbe).

L'examen anatomique des feuilles de la pousse axillaire m'a permis de constater une structure assez bizarre de certains faisceaux. A quelques rares niveaux, ceux-ci présentent de véritables boucles ligneuses qui s'étendent dans un plan transversal à la feuille. Ces boucles sont composées d'une ou de deux trachées qui partent de l'un des côtés du faisceau, contournent celui-ci du côté du bois et reviennent s'amorcer de l'autre côté à la partie ligneuse (fig. 56, pl IV : faisceau dont la boucle n'est pas différenciée). Il est rare que les choses en restent là; le plus souvent, en effet, des anastomoses provenant de faisceaux voisins viennent se jeter dans ces boucles. Quels sont le rôle et la signification de ces boucles? Je n'ai pu démêler cette question d'autant plus intéressante que ces formations semblent être localisées dans les feuilles d'une pousse végétative axillaire.

Les deux saillies carénales sont formées par un recloisonnement plus actif des cellules du mésophylle externe situées der-

rière les faisceaux L. Ces caractères du limbe se retrouvent de moins en moins marqués dans les feuilles 2, 3, 4, ...

L'*acumen* de ces dernières est organisé de la même façon que dans la feuille végétative. Cependant, à cause de son aplatissement plus ou moins prononcé, la moelle centrale, provenant du mésophylle moyen, y est moins ou plus prédominante suivant l'ordre de plus en plus élevé des feuilles.

CHAPITRE IV

LES BULBILLES.

Dans l'Introduction, j'ai déclaré n'employer le terme bulbille que pour mieux distinguer les productions bizarres, naissant sur la gaine charnue des feuilles, des caïeux que produisent la plupart des plantes bulbeuses. Ce terme est adopté par la plupart des auteurs, tels que Mirbel (**30**, p. 137), A. de Saint-Hilaire (**41**, p. 241), Le Maout et Decaisne (**21**, p. 6), Duchartre (**6**, p. 540), Baillon (**2**, p. 42) et Van Tieghem (**56**, p. 314); mais tous nomment ainsi des bourgeons à écailles épaisses et charnues qui naissent à l'aisselle de feuilles ordinaires, comme dans le *Lilium bulbiferum*. La plupart d'entre eux comprennent, en outre, sous ce nom, des formations bulbiformes qui occupent la place des fleurs, comme c'est le cas dans les inflorescences de quelques Monocotylées (*Allium, Gagea, Agave*). Mais E. Germain de Saint-Pierre (**11**, p. 165) appelle encore bulbilles les caïeux pédicellés qui se forment aux dépens des bulbes de certaines espèces d'*Allium* et de *Tulipa*. Quoi qu'il en soit, le mot bulbille étant le diminutif de bulbe, il me semble rationnel de l'appliquer à toute espèce de productions organisées comme des bulbes, mais plus petites. C'est ainsi que je le comprends.

§ 1. — BULBILLES NORMALES.

Il y a lieu, en effet, de distinguer des bulbilles de deux sortes; celles que porte toute gaine foliaire âgée d'un bulbe adulte et dont il a été question à la page 5 sont les bulbilles normales; nous les qualifions ainsi à cause de leur présence constante et de la fixité de leur position sur les gaines. Cependant il faut remarquer que dans le cas où une pousse végétative

s'est développée à l'aisselle d'une feuille, la gaine suivante ne porte pas de bulbilles.

I. — *CARACTÈRES EXTÉRIEURS.*

Ces bulbilles ont, en moyenne, je l'ai dit, la grosseur d'une noisette ordinaire; elles sont biconvexes, à faces ovoïdes, l'antérieure, celle qui regarde l'observateur supposé placé dans l'axe du bulbe mère, étant plus bombée que la face postérieure, ce qui résulte de ce que le plan d'insertion est oblique par rapport à l'axe de la bulbille (fig. 57, pl. V : une bulbille vue de profil). En leur qualité de petits bulbes, elles sont constituées par un axe très court, portant de petites feuilles disposées en ordre distique imparfait, différentes de forme et en nombre peu variable. L'une d'elles, prise comme exemple, présente huit feuilles. La plus extérieure, feuille 1 (fig. 58, pl. V), est réduite à la gaine close et montre à son sommet, du côté de la face postérieure, un orifice analogue à la fente cotylédonnaire; le limbe et l'*acumen* sont réduits à leur plus simple expression; la feuille 2 présente la même conformation, mais l'orifice est situé très peu plus bas, à la face antérieure (fig. 59, *a*, pl. V); la feuille 3 montre déjà un *acumen* un peu plus prononcé, en dessous duquel se voit, à la face postérieure, l'orifice un peu plus grand (fig. 59, *b*); l'*acumen* et l'orifice s'accentuent de plus en plus sur les feuilles 4 et 5 (fig. 59, *c*, *d*, *e*, *f*); toutes ces feuilles revêtent la forme générale de la bulbille; elles ne sont pas destinées à s'accroître beaucoup par la suite, et l'on peut les considérer comme réduites à leur gaine. La feuille 6 a la forme d'un cône effilé; vers le milieu de sa hauteur et à la face antérieure, elle présente un petit orifice; deux régions y présentent donc déjà une notable différenciation; la gaine en dessous de l'orifice, l'*acumen* au-dessus (fig. 60, pl. V); mais cette feuille subira par la suite une croissance intercalaire dont l'intensité se répartira plus ou moins inégalement dans toute son étendue, ce qui provoquera notamment un certain allongement du limbe correspondant à l'orifice. La feuille 7 est plus cylindrique et n'a que $6^{mm},5$ de longueur, dont 5 pour l'*acumen*

et le reste pour la gaine, l'orifice très petit séparant ces deux régions (fig. 61, pl. V); c'est là d'ailleurs la forme que présentent toutes les feuilles végétatives aux premiers stades de leur formation. Quant à la feuille 8, elle ne constitue encore qu'un bourrelet entourant obliquement le sommet végétatif du plateau (fig. 62, pl. V).

II. — *ANATOMIE.*

A. — Position et insertion.

A la page 16, j'ai indiqué la position occupée par deux bulbilles adultes, côte à côte, au même niveau, à mi-hauteur de la gaine, un peu latéralement en dessous du sinus déterminé par la séparation des deux bords du limbe (fig. 4). J'ai signalé comment chacune de ces bulbilles était vascularisée par un système de trois faisceaux provenant directement du plateau et groupés sous l'épiderme externe de la gaine, système s'étendant du plateau jusqu'au niveau des bulbilles et provoquant, suivant toute cette étendue, deux grosses nervures parallèles. De ces trois faisceaux, l'un est un peu isolé, les deux autres sont très rapprochés l'un de l'autre, voire même confondus par leur partie ligneuse. En dessous de ces deux bulbilles, aucune autre n'avait pris naissance. C'est, ai-je dit, un cas des plus simples qui se réalise très rarement.

Ordinairement, les bulbilles sont plus nombreuses et se trouvent alors disposées en une série assez irrégulière, les unes en dessous des autres le long de la même région de la gaine, et apparaissent en ordre basipète (fig. 63, pl. V). Chacune reçoit trois, rarement deux faisceaux bulbillaires. Dans ces circonstances, ces faisceaux ne se maintiennent pas tous, cela se conçoit, à la périphérie. Ceux qui se rendent dans la bulbille primordiale occupent d'abord, en descendant, une situation périphérique; à une certaine distance, ils obliquent plus ou moins brusquement, de manière à gagner les assises moyennes de la gaine qui les intéresse. Pendant quelque temps encore, ils constituent, dans

cette région, un trio de faisceaux qui se regardent par leur coin ligneux. Deux d'entre eux, si pas tous trois, finissent par se réunir en formant un faisceau à orientation presque toujours anormale par rapport à la gaine. Ceux qui descendent des bulbilles subséquentes suivent aussi d'abord la périphérie, puis s'infléchissent vers les assises moyennes en se séparant, de manière à venir se disposer sur les flancs du groupe trimère précédent. Parfois, ici, pendant qu'ils s'infléchissent ainsi, deux des trois faisceaux se réunissent déjà en un seul; parfois encore l'un des trois envoie une anastomose vers les faisceaux foliaires de la gaine situés près de l'épiderme interne; ou même, fait plus rare, il se rend entièrement dans le cercle de ces faisceaux; enfin, dernier cas, ce troisième faisceau se confond, en descendant, avec l'un des faisceaux bulbillaires provenant de bulbilles situées plus haut. Il en résulte que la coupe transversale pratiquée à la base de la gaine dans la région bulbillifère rencontre deux catégories de faisceaux; plus rapprochés de la face interne que de la face externe, des *faisceaux foliaires* toujours normalement orientés, complètement individualisés, disposés sur plusieurs rangs; vers le milieu de l'épaisseur de la gaine, des *faisceaux bulbillaires* à orientation variable, provenant de la fusion de plusieurs faisceaux issus des bulbilles. Les schémas des figures 64 et 65, pl. V, résument les observations qui précèdent. Une coupe faite à égale distance entre le niveau de la coupe dont il vient d'être question et celui de l'insertion de la bulbille primordiale ne diffère qu'en ce que les faisceaux bulbillaires sont moins anastomosés entre eux et en ce qu'ils sont souvent disposés en petits groupes de deux ou de trois, sortes de stèles ressemblant un peu à celles du cladode de *Xylophylla* (fig. 66, pl. V).

Par ce qui précède, on remarquera aussi que les faisceaux bulbillaires se rendent dans les bulbilles suivant un mode qui ressemble beaucoup à la décussation des faisceaux foliaires dans les tiges monocotylées (fig. 65).

Il est à noter que fréquemment la bulbille primordiale avorte en ne laissant d'autres traces que le système de faisceaux qui lui était destiné, système qui n'arrive pas alors à la périphérie et

dont les éléments se terminent en pointe libre à divers niveaux. Dans ce cas, les bulbilles développées révèlent extérieurement leur origine subséquente par le niveau inférieur où elles sont insérées sur la gaine âgée.

B. — Genèse des bulbilles.

L'entre-nœud étant l'intervalle qui sépare deux feuilles consécutives, cette région est réduite à si peu de chose dans le plateau de l'*Ornithogalum caudatum*, que l'on ne conçoit guère la possibilité pour des organes axillaires de s'y développer. Il en est ainsi cependant des bulbilles normales; mais pour le comprendre, il ne faut pas perdre de vue qu'elles s'organisent à un moment où les gaines qui les emboîtent sont loin d'être aussi épaisses qu'elles le seront en définitive et qu'elles ne comblent pas encore l'espace internodal. Quand la gaine qui la portera a environ 3 centimètres de diamètre, la première bulbille apparaît comme un petit mamelon méristématique situé en face du faisceau M de la feuille précédente (*Mutterblatt* des auteurs allemands) Bientôt, par suite du développement basilaire plus actif de la gaine supérieure plus jeune, celle-ci empiète sur l'espace internodal en entraînant sur son dos, en quelque sorte, le mamelon qui s'entourne en même temps d'un bourrelet circulaire un peu oblique, ébauche de la première gaine de la bulbille future. Celle-ci s'organise de plus en plus, tout en s'élevant davantage, entraînée qu'elle est par l'accroissement basilaire de la gaine; le premier bourrelet circulaire est, en effet, bientôt suivi d'un second en ordre acropète, et celui-ci d'un troisième. A ce moment, la jeune bulbille se trouve déjà à une hauteur de 4 millimètres sur la gaine et les faisceaux commencent à s'y différencier. Deux autres mamelons apparaissent alors simultanément et côte à côte à la base de la gaine et sont aussitôt entraînés aussi pendant que le premier continue son ascension, et c'est ainsi que, normalement, apparaissent ensuite deux troisièmes, deux quatrièmes, etc., bulbilles, toujours à la base de la même gaine.

C. — Parcours des faisceaux dans les premières gaines des bulbilles.

C'est en étudiant les coupes successives dans de très jeunes bulbilles que l'on se rend le mieux compte de la façon dont les trois faisceaux bulbillaires issus de la gaine bulbillifère se comportent pour vasculariser les différents organes composant une bulbille.

Nous venons de voir que les bulbilles présentent une forme biconvexe. Il en résulte que la première gaine est bicarénée (fig. 67, pl. V), les suivantes présentant ce caractère de moins en moins prononcé. Le faisceau bulbillaire isolé se bifurque; une des branches reste dans l'axe de la bulbille, l'autre se rend dans la carène la plus rapprochée. Cette branche-ci se bifurque aussitôt à son tour; la partie la plus importante va occuper la carène qu'elle longe désormais, c'est le faisceau M; l'autre partie, très grêle, est un faisceau L qui va prendre dans la partie postérieure de la gaine une position telle qu'il occupera plus haut l'un des bords du court limbe. Pendant ce temps, les deux autres faisceaux bulbillaires s'écartent l'un de l'autre, puis chacun d'eux se bifurque également, l'une des branches de chaque bifurcation passant de même dans la gaine, l'autre branche restant dans l'axe de la bulbille. L'un de ces faisceaux bulbillaires fournit ainsi le second faisceau L qui, en se rendant dans l'autre carène, envoie aussi un faisceau plus grêle dans la partie postérieure; c'est un faisceau *m* qui occupera plus haut l'autre bord du timbe. L'autre faisceau bulbillaire fournit de la même façon un faisceau *i* qui va se placer au milieu de la partie antérieure de la gaine. Entre ce faisceau *i* et le faisceau M, ce dernier détache bientôt un faisceau *i'*, et dans la partie supérieure de la gaine, un faisceau *i'* apparaît, entre *i'* et le faisceau L de la carène, aux dépens de ce dernier. Par conséquent, à la base du limbe, il y a sept faisceaux (fig. 67) :

L M *i' i i'* L *m*.

Tous ces faisceaux se terminent en pointe libre : d'abord le *i'* près du M; à la limite supérieure du limbe, l'autre *i'*; le L près du M et le *m*; enfin, près du sommet de l'*acumen* rudimentaire les M, *i* et le second L.

La course des faisceaux qui vient d'être décrite est celle qu'on peut observer dans une première gaine de bulbille jeune. Plus tard, un petit nombre de faisceaux s'intercaleront entre les anciens; c'est un *i''* entre M et *i'* (fig. 68, pl. V), un *i''* et parfois un *i'''* entre *i'* et L, rarement un *i''* entre *i* et l'un des *i'*, plus rarement encore un nouveau *i* entre L du côté postérieur et M ou *m'* entre L de la carène et *m*. De rares anastomoses s'étendront enfin horizontalement entre ces faisceaux.

Tous ces faisceaux ne présentent pas l'importance que semble devoir comporter leur qualité. Ainsi le L du bord n'est pas plus gros que le *m;* par contre, le *i* est presque aussi fort que le M ou que l'autre L. Non prévenu, l'observateur d'une coupe représentée par la figure 67 l'interpréterait tout autrement, comme suit :

m L *i* M *i* L *m*.

La figure 70, pl. V, résume la description qui précède.

La feuille suivante, réduite à sa gaine aussi, présente sensiblement les mêmes caractères que la première gaine : grande inégalité des deux moitiés de la feuille; répartition inégale des faisceaux de part et d'autre du médian M; terminaison des faisceaux en pointe libre. Ce dernier trait se répète d'ailleurs dans toutes les feuilles réduites à leur gaine qui suivent; de même le premier; quant au deuxième caractère, il tend à disparaître dès la troisième ou la quatrième feuille; mais, comme nous l'avons vu, il ne le fait jamais d'une façon absolue, pas plus que le premier. Remarquons aussi que le nombre des faisceaux augmente d'une gaine à l'autre plus interne.

La disposition insolite des faisceaux dans les premières gaines des bulbilles, lesquelles accusent une si grande inégalité des deux moitiés de la feuille, résulte de la compression que subissent les bulbilles dès leur apparition. Un fait analogue a d'ailleurs déjà été mis en lumière pour la préfeuille des bour-

geons axillaires dans le *Tradescantia* par M. Gravis (**15**, p. 161). Ce savant professeur a également constaté, pour le même organe, la terminaison libre des faisceaux. La première gaine des bulbilles n'est autre chose qu'une préfeuille; elle en remplit, au surplus, les fonctions.

D. — Histologie.

Les caractères histologiques des gaines des bulbilles sont ceux des gaines des feuilles végétatives ordinaires, avec cette restriction que plus elles sont situées à l'extérieur, moins leur parenchyme tend à s'hypertrophier et moins aussi il renferme d'amidon. Ainsi la première gaine, notamment, n'est souvent composée, sauf aux carènes, que de cinq assises cellulaires : une assise pour chacun des deux épidermes et des trois mésophylles. Dans les cellules de ce dernier, on trouve très peu d'amidon (fig. 69, pl. V). La deuxième gaine présente de sept à neuf assises et l'amidon y est plus abondant. La troisième offre déjà tous les caractères d'un organe de dépôt pour l'amidon.

Des stomates ne se trouvent qu'à l'épiderme externe, dans la partie supérieure des gaines.

Historique.

En résumé, les bulbilles normales me paraissent être simplement des bourgeons axillaires qui, organisés à leur emplacement normal, sont, par suite d'un manque de place et d'une activité génératrice particulièrement intense du méristème basilaire de la feuille suivante, entraînés le long de la face externe postérieure de la gaine de cette feuille et séparés de leur feuille mère (*Mutterblatt*). La disposition collatérale des faisceaux bulbillaires permet de croire que ce sont des bourgeons axillaires collatéraux analogues à ceux des *Muscari botryoides*, figurés par Van Tieghem (**57**, p. 243, fig. 85), dont la disposition échelonnée s'explique par leur apparition successive et aussi par la place restreinte qu'il leur est permis d'occuper; on peut aussi les

comparer aux bourgeons superposés comme on en trouve dans les Juglandées. D'autre part, ces bulbilles sont en tous points comparables aux caïeux pédicellés que Th. Irmisch (18) a si bien décrits et figurés dans certaines espèces du genre *Allium* (*A. vineale* L., p. 10, pl. II, fig. 6, 7 et 8, *A. rotundum* L., p. 14, pl. II, fig. 19, et *A. Scorodoprasum* L., p. 13, pl. II, fig. 17). Cette analogie est d'autant plus frappante que, dans cette dernière espèce, l'auteur dit que les pédicelles des caïeux sont habituellement concrescents en une lame rubanée et que le dessin correspondant à cette description (pl. II, fig. 17) montre les caïeux disposés sur cette lame identiquement comme les bulbilles de l'*Ornithogalum caudatum* sur la gaine. On peut donc dire que, dans notre espèce, la concrescence est poussée plus loin encore et qu'elle frappe en même temps les pédicelles des bulbilles et la gaine de la feuille suivante. La manière d'être des bulbilles pédicellés dans les *Allium* est aussi décrite par E. Germain de Saint-Pierre (11, p. 165). Je n'ai pu contrôler les observations de cet auteur au point de vue de la valeur morphologique des pédicelles; mais son opinion qu'il s'agirait là de gaines foliaires allongées cylindriquement me paraît fort contestable. Il y a tout lieu de croire au contraire que chaque pédicelle est le premier entre-nœud très allongé de la bulbille qu'il porte à son sommet.

§ 2. — BULBILLES ADVENTIVES.

J'appelle ainsi les bulbilles de la deuxième sorte qui peuvent, dans certaines circonstances, prendre naissance sur des morceaux de gaine détachés de la plante adulte, fait analogue à celui bien connu qui se passe dans d'autres plantes : *Streptocarpus, Bryophyllum, Cardamine, Lilium, Hyacinthus, Atherurus*, etc.

I. — *CARACTÈRES EXTÉRIEURS ET CONDITIONS DE FORMATION.*

Quelques morceaux de gaines charnues ayant été abandonnés, en été, sur une table du laboratoire, afin de les soumettre à la

macération après leur dessiccation, certains d'entre eux montrèrent, après quatre ou cinq mois, des bulbilles adventives, coniques, un peu moins grosses, mais plus allongées que les bulbilles normales, insérées le long d'un des bords sectionnés. On sait qu'un phénomène semblable, dont l'horticulture a tiré profit, se présente, indépendamment de ceux cités plus haut, dans les genres *Begonia*, *Gloxinia*, *Maclura*, *Peperomia*, *Achimenes*, *Marattia*. Mis dans des conditions convenables d'humidité et d'obscurité, des morceaux de feuilles de ces plantes reproduisent, après un certain temps, de nouveaux individus.

Rappelons pour mémoire que Turpin (**55**, p. 5) a observé le même fait dans l'*Ornithogalum thyrsoides* H. K.; mais il serait oiseux de formuler une critique de son mémoire qui s'inspire des idées de l'époque au point de vue anatomique.

Étant donnée la faculté que présentent des morceaux de gaine de former des bulbilles adventives, dans notre espèce, il me parut intéressant de procéder à quelques expériences à ce sujet. Il en résulte : 1° que des gaines sectionnées, en hiver, ne donnent pas de bulbilles; ce n'est qu'au printemps et en été qu'on obtient ce résultat; 2° les gaines trop jeunes ou trop âgées se dessèchent sans produire ces corps reproducteurs; il faut pour cela s'adresser à des gaines présentant des bulbilles normales incomplètement développées; 3° dans une atmosphère suffisamment humide et à la lumière diffuse ou à l'obscurité, de nombreux rudiments de bulbilles se produisent *du côté de l'épiderme interne* et le long des bords transversaux basilaires seulement des morceaux, soit que ceux-ci proviennent de la partie antérieure ou de la partie postérieure de la gaine; le long des bords longitudinaux et du bord transversal distal, ainsi que sur les blessures faites au milieu d'un morceau, il ne se produit aucune bulbille. De tous ces rudiments, quelques-uns seulement arrivent à complet développement.

II. — *ANATOMIE.*

A. — Insertion et genèse.

Les tissus de ces bulbilles adventives ne sont pas en continuité anatomique avec ceux de la partie de plante sur laquelle elles naissent, comme c'est le cas pour les bulbilles normales.

Les bulbilles adventives s'organisent uniquement aux dépens de l'épiderme interne; une cellule de cette assise se divise par une cloison tangentielle, suivie bientôt dans cette voie par cinq, six cellules collatérales et davantage encore (fig. 71, pl. V). A ce premier cloisonnement en succèdent d'autres dans le même sens, jusqu'à ce qu'un mamelon d'une certaine dimension se montre au jour (fig. 72, pl. V). A partir de ce moment, le tissu constituant le mamelon se transforme en un véritable méristème, et l'on se trouve alors en présence d'un mamelon méristématique semblable à celui qui prend normalement naissance à l'aisselle des gaines charnues dans un bulbe. Les bourrelets successifs se forment ici comme dans la bulbille normale, leur obliquité étant alternativement dirigée vers l'une et l'autre face de la bulbille, et le développement ultérieur est à peu près le même. Seulement, comme aucune compression n'a lieu, la forme générale de la bulbille et celle de ses gaines diffèrent, comme je l'ai indiqué plus haut, des formes des parties correspondantes de la bulbille normale.

En même temps que les cellules épidermiques, les cellules de l'assise hypodermique du mésophylle interne se cloisonnent aussi tangentiellement, mais un petit nombre de fois seulement.

Les mamelons naissant ordinairement côte à côte, il se produit toujours une légère concrescence à leur base; il s'ensuit qu'ils semblent naître tous d'une bande méristématique commune, tels des ovules d'un carpelle multiovulé le long du placenta. Et, en effet, les choses se passent à peu près comme s'il en était ainsi. A un moment donné, on voit apparaître en dessous de chacun des mamelons, dans la bande méristématique, un massif

libéroligneux ou tout au moins procambial; chaque massif est une ramification d'un cordon libéroligneux, à trachées courtes, qui s'étend le long de la limite profonde de la bande méristématique, suivant la zone formée par le nouveau tissu provenant du recloisonnement de l'assise hypodermique du mésophylle interne. Ce cordon libéroligneux est lui-même parfois relié avec les faisceaux de la feuille mère par des anastomoses restant longtemps non différenciées (fig. 73, pl. V).

Les bulbilles adventives sont donc bien en rapports vasculaires avec la feuille mère. On ne saurait le concevoir autrement, attendu qu'elles tirent de cette dernière leurs moyens de subsistance jusqu'au moment où elles sont aptes à végéter pour leur propre compte; il se produit alors un tissu subéreux dans la région de l'hypoderme recloisonné de la gaine mère, tandis que des racines surgissent aux premiers nœuds des bulbilles. Le fragment de gaine peut maintenant se dessécher; la bulbille est organisée de manière à pouvoir attendre, s'il le faut, un an et même davantage des conditions favorables pour végéter et reproduire une plante complète; ce résultat est ordinairement atteint en moins de deux ans depuis sa mise en végétation.

Une bulbille apte à végéter isolément (fig. 74, pl. V) est composée de cinq ou six feuilles, dont la plus interne n'est encore qu'à l'état de simple mamelon. Celle située tout à fait à l'extérieur, c'est-à-dire la première feuille ou préfeuille, se présente tantôt sous forme d'une gaine cylindrique complètement close, largement ouverte au sommet, ou bien d'une gaine en forme d'écaille non engainante à la base. En aucun cas, l'*acumen* n'est indiqué, et, dans le premier, le limbe même n'est guère représenté que par une très légère surélévation, d'un côté, du bord de l'espèce de cupule que forme alors cette préfeuille (fig. 74, pl. V); dans le second cas, la préfeuille a la forme d'une cuiller très obtuse (fig. 75, pl. V).

Quelle que soit la forme de la préfeuille, sa disposition phyllotaxique est un peu variable, mais loin d'être distique par rapport à la feuille 2; elle fait avec celle-ci un angle de 45° en moyenne; il est souvent un peu moindre, rarement beaucoup

plus grand. Entre les feuilles 2, 3 et les feuilles suivantes, la disposition distique tend à se rétablir; cependant elle n'est jamais parfaite, pas plus d'ailleurs que dans les autres espèces de pousses étudiées antérieurement (fig. 76).

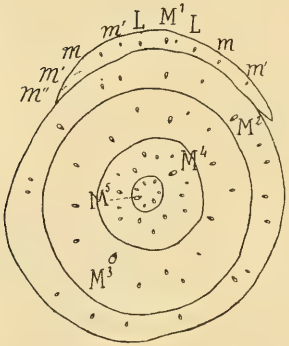


Fig. 76. — Coupe transversale dans une bubille adventive.

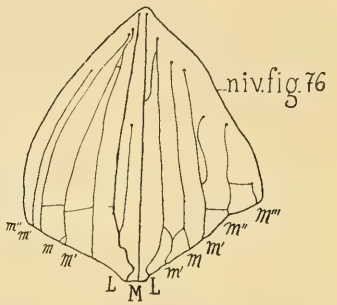


Fig. 77. — Parcours des faisceaux dans la préfeuille d'une bulbille adventive.

Le plan d'insertion est oblique par rapport à l'axe de la bulbille ; le plan de symétrie commun des feuilles supposées parfaitement distiques est perpendiculaire au sens de l'obliquité du plan d'insertion ; il en résulte que l'une des moitiés de chaque feuille se dégage avant l'autre et est plus grande que celle-ci.

B. — Parcours des faisceaux dans les premières gaines.

Dans une préfeuille écailleuse, les faisceaux provenant directement de la base sont généralement au nombre de douze, que l'on peut considérer comme composant la formule :

$$m''m'm\ m'\mathrm{L}\,\mathrm{M}\,\mathrm{L}\ m'm\ m'm''m'''.$$

Mais à comparer la figure 77 avec la figure 40, planche IV, on est frappé de la ressemblance qu'offrent les parcours des faisceaux dans le cotylédon et dans la préfeuille d'une bulbille adventive.

La principale différence entre ces deux parcours réside en ce

que les faisceaux de la préfeuille sont en plus grand nombre et qu'ils sont presque tous terminés en pointe libre; on aperçoit aussi quelques rares anastomoses entre eux. Naturellement aussi, plus les faisceaux sont rapprochés des bords, plus leur trajet est court.

C'est ce dernier caractère qui permet le mieux de distinguer le parcours d'une préfeuille écailleuse de celui d'une préfeuille cupuliforme. Ici, tous les faisceaux arrivent presque à la même hauteur, mais ne sortent pas tous au même moment; en outre, leur nombre est parfois un peu plus élevé.

Les feuilles 2 et 3 possèdent une gaine close relativement longue, un court limbe, mais pas d'acumen. La disposition des faisceaux y est la même que dans la gaine d'une feuille végétative, c'est-à-dire que, de part et d'autre du faisceau M, les moitiés des feuilles sont inégales et renferment un plus ou moins grand nombre de faisceaux intermédiaires *i* et de faisceaux marginaux *m*. Les faisceaux principaux *m'm* L M L *m m'* se terminent en pointe libre. L'organisation des feuilles suivantes devient de plus en plus normale.

Quant aux caractères fournis par l'histologie, ils sont exactement les mêmes que ceux des bulbilles normales.

RÉSUMÉ

FEUILLE VÉGÉTATIVE LA PLUS COMPLÈTE.

La feuille végétative de l'*Ornithogalum caudatum* présente trois régions : la gaine, le limbe et l'*acumen*. Bien que différentes quant à leur forme et quant à leurs fonctions, il n'existe pas de limite anatomique entre ces trois parties ; les faisceaux principaux passent de l'une à l'autre directement, sans subir d'anastomose. Toutes trois ont les nervures parallèles et mises en rapport entre elles par des anastomoses horizontales ou obliques. Tous les faisceaux que l'on trouve à la base du limbe sont déjà individualisés et même différenciés dès leur entrée dans la feuille ; ils traversent la gaine pour se rendre dans le limbe et l'*acumen*, parties où ils disparaissent successivement, à commencer par ceux d'ordre plus élevé. La gaine est, en outre, sillonnée par de nombreux faisceaux d'ordre très élevé, parallèles aux précédents, qui se différencient tardivement et qui ne s'étendent pas en dehors de la gaine. Enfin, dans la région de la gaine située en dessous du point de séparation des bords du limbe existe un groupe de faisceaux bulbillaires qui sortent par deux ou par trois dans les bulbilles.

Dans la gaine, les faisceaux principaux présentent à certain moment de leur évolution, entre le bois et le liber, une zone cambiale très nette ; mais elle est très fugace et ne donne lieu à aucune production libéroligneuse secondaire. Ce fait a d'ailleurs déjà été signalé dans d'autres Monocotylées.

Les divers tissus se retrouvent dans les différentes régions avec quelques modifications adaptationnelles : le mésophylle moyen, hypertrophié dans la gaine, y devient un tissu de dépôt

de substances alimentaires; il se réduit à cinq ou six assises dans le limbe où il joue un rôle aquifère; il remplit le même rôle sous forme de moelle centrale dans l'*acumen*, où sa mort précède celle de cet organe tout entier.

Le mésophylle externe, dans la gaine, se confond plus ou moins avec le précédent dans le rôle de tissu de dépôt; il devient nettement chlorophyllien dans le limbe, avec assise externe palissadique, et se continue comme tel dans l'*acumen* qu'il entoure complètement.

Le mésophylle interne subit les mêmes modifications que le mésophylle externe, abstraction faite de l'assise palissadique; seulement dans l'*acumen*, il perd sa chlorophylle, se réduit à quelques cellules qui se recloisonnent deux fois et se confondent avec le mésophylle moyen pour former la moelle centrale.

Quant aux épidermes, l'épiderme externe forme une assise de cellules qui revêt toute la face externe de la gaine et du limbe et qui encapuchonne en quelque sorte l'*acumen*. L'épiderme interne s'étend de même sur toute la face interne de la gaine et du limbe, et les dernières traces s'en évanouissent à l'extrême sommet du sinus à la base de l'*acumen*. Celui-ci résulte d'une augmentation de l'épaisseur des mésophylles avec réduction puis disparition de la face interne, ce qui entraîne le rapprochement des faisceaux marginaux extrêmes en face des autres faisceaux.

Les deux épidermes présentent des stomates en proportions peu différentes. Jamais de poils.

BRACTÉES.

Les bractées sont des feuilles ayant subi un développement incomplet; l'*acumen* y est à peine représenté; la gaine ne s'y forme jamais ; seul, le limbe s'y développe quelque peu. Les trois ou quatre petits faisceaux qui y pénètrent se terminent en pointe libre et ne sont jamais reliés par des anastomoses; le médian seul s'étend jusque dans l'*acumen*.

PLANTULES.

Cotylédon. — C'est ici un organe dans lequel les caractères d'une feuille sont beaucoup plus reconnaissables que dans l'organe homologue de toute autre Monocotylée. Il comprend trois régions : la gaine, le limbe et l'*acumen*. Le limbe est insignifiant, puisqu'il est restreint à la région qui correspond à la fente cotylédonnaire, réduite elle-même au calibre strictement nécessaire pour livrer passage aux premières feuilles de la plantule; le suçoir n'est que l'extrémité de l'*acumen* et ne s'en distingue que par sa situation incluse dans l'albumen et par son rôle physiologique. Mais la gaine et l'*acumen* offrent, toute proportion gardée, la même structure que dans la feuille végétative. Dans la gaine, l'analogie est d'autant plus grande qu'il y existe sept faisceaux, nombre relativement considérable pour un cotylédon; néanmoins ce sont les faisceaux latéraux LL qui sont là les plus importants. L'*acumen* présente mieux les caractères cotylédonnaires, en ce qu'il n'est parcouru que par les deux faisceaux LL.

Premières feuilles de la plantule. — Elles établissent la transition du cotylédon vers les feuilles végétatives. Sauf le suçoir absent, les régions y sont représentées dans les mêmes proportions, avec la même structure. Les faisceaux foliaires y deviennent de plus en plus nombreux, 11, 18, 27, ..., auxquels viennent s'ajouter dans la gaine des faisceaux d'ordre très élevé et d'apparition tardive. Le faisceau médian M y est toujours le plus important et s'élève jusqu'à l'extrémité de l'*acumen* en dépassant plus ou moins les latéraux L.

POUSSE AXILLAIRE VÉGÉTATIVE.

Elle procède d'un bourgeon axillaire unique qui s'est développé de suite en restant inséré sur le plateau, fait qui se produit rarement; elle comprend quelques feuilles, dont il convient de distinguer la première sous le nom de préfeuille. Toutes ces

feuilles sont des organes élaborateurs; la gaine y est insignifiante et ne produit pas de bulbe; le limbe, au contraire, est bien développé; l'*acumen*, presque nul dans la préfeuille, devient plus important dans les feuilles suivantes; elles ont toutes le limbe plus ou moins bicaréné, ce qui provient de la grande compression antéro-postérieure que subit la pousse pendant son développement, et qui résulte de l'emboîtement des gaines entre lesquelles elle naît. Ce caractère est très accentué dans la préfeuille, où il existe deux fortes saillies longitudinales correspondant aux carènes et produites par un recloisonnement local du mésophylle externe.

Le trajet des faisceaux présente la même allure que dans la feuille végétative, eu égard aux régions que comportent les feuilles de la pousse axillaire. La terminaison en pointe libre des faisceaux marginaux extrêmes dans la préfeuille accuse un arrêt dans le développement de cet organe.

Au point de vue de l'histologie, il y a concordance parfaite avec la feuille végétative. Seulement la gaine, lorsqu'elle existe, ne montre aucune hypertrophie des mésophylles; par contre, dans la gaine et dans le limbe de la préfeuille, il faut tenir compte du recloisonnement du mésophylle externe à l'endroit des deux saillies carénales.

Des boucles ligneuses contournant, à certains niveaux, la partie ligneuse des faisceaux foliaires, semblent constituer une particularité singulière propre aux feuilles de la pousse axillaire végétative.

BULBILLES NORMALES.

Ce sont de petits bulbes de la grosseur et de la forme d'une noisette, mais légèrement comprimés dans le sens antéro-postérieur, renfermant une demi-douzaine de feuilles réduites, pour ainsi dire, à leur gaine; car le limbe n'y est représenté, comme dans le cotylédon, que par une fente, l'*acumen* par une protubérance apicale qui s'accentue avec l'ordre d'apparition de ces organes; ceux-ci enveloppent à leur tour deux ou trois feuilles

végétatives en voie de formation. Ces dernières se distinguent par leur *acumen* plus long, mais surtout par un accroissement intercalaire considérable de la région de la fente au-dessus de la gaine close, région qui devient un limbe très long et aplani.

On sera frappé de la ressemblance des premières feuilles des bulbilles à limbe rudimentaire avec le cotylédon, tandis que les feuilles suivantes ressemblent entièrement aux feuilles normales de la plante adulte.

Les bulbilles sont insérées, à la face externe de la gaine, en une rangée verticale non tout à fait diamétralement opposée au faisceau médian de celle-ci ; elles y ont pris naissance successivement en ordre basipète. En réalité, ce sont des bourgeons axillaires superposés comme ceux du Noyer; mais au lieu d'être échelonnés comme là le long d'un entre-nœud bien développé de la tige, ils sont étagés sur la gaine de la feuille suivante, l'entre-nœud intermédiaire étant quasiment nul.

On peut considérer aussi les bulbilles de l'*Ornithogalum caudatum* comme des bourgeons axillaires pédicellés, semblables à ceux que l'on trouve dans les *Allium vineale* et *Scorodoprasum*, mais à pédicelles concrescents non seulement entre eux, mais aussi avec la gaine suivante. Ces deux interprétations ne s'excluent d'ailleurs nullement; de part et d'autre, il s'agit, en effet, de bourgeons axillaires multiples.

La structure histologique des gaines auxquelles sont réduites les premières feuilles des bulbilles répond entièrement à celle des gaines des feuilles végétatives; il en est de même de la disposition et du trajet des faisceaux. Seulement, dans la première de ces gaines ou préfeuille, l'hypertrophie des mésophylles n'est jamais considérable, il s'y développe peu d'amidon, les faisceaux y sont peu nombreux, il n'y a pas de faisceaux propres à la gaine — tous caractères qu'on a rencontrés aussi dans le cotylédon — et les deux moitiés de la préfeuille sont très inégales; ces caractères de la préfeuille s'effacent peu à peu dans les gaines suivantes pour faire place aux caractères des gaines de feuilles végétatives.

Dans tous ces organes, les faisceaux principaux se terminent

en pointe libre, ce qui semble indiquer qu'ils ont subi un arrêt dans leur développement.

BULBILLES ADVENTIVES.

Les bulbilles adventives se développent sur *tous* les morceaux indistinctement des gaines adultes de feuilles végétatives (ce qui dénote bien leur caractère adventif); mais elles ne naissent que sur les bords basilaires de ces morceaux, ce qui trahit nettement une polarité; enfin il est à remarquer qu'elles se développent uniquement à la face interne tout le long de la section. Tout l'épiderme interne s'est recloisonné et constitue de la sorte une bande de tissu méristématique analogue au placenta des ovaires. Sur cette bande s'élèvent côte à côte des mamelons méristématiques qui sont les futurs plateaux et qui bientôt produisent autour de chacun d'eux des bourrelets circulaires, ébauches des premières feuilles. En même temps apparaît, dans la partie profonde de la bande, un massif libéroligneux qui s'étend, suivant toute la longueur de la bande, comme un faisceau placentaire et qui, comme lui, envoie des branches dans chacun des mamelons en voie de développement. Il arrive parfois que ces branches soient reliées par des anastomoses aux nervures de la feuille mère, mais ce n'est pas toujours le cas, et on peut dire que ces bourgeons adventifs naissent indépendamment de ces nervures.

Ces bulbilles ont la même constitution et presque la même grosseur que les bulbilles normales; seulement, n'étant jamais gênées dans leur développement, elles sont coniques. La première gaine a la forme d'une cupule à bord un peu plus élevé d'un côté, ou celle d'une cupule à bord très bas d'un côté et très élevé, au contraire, de l'autre, Dans les deux cas, elle ne s'élève guère au delà de la moitié de la bulbille, comme la primine d'un ovule orthotrope incomplètement développé, et l'angle de divergence qu'elle forme avec la feuille suivante est insolite : 45°; mais à partir de celle-ci, l'ordre distique réapparaît. La deuxième feuille est aussi réduite à la gaine en forme de

cupule plus longue que la précédente et à bord beaucoup plus élevé du côté du faisceau médian M, formant une sorte de limbe, mais rien encore qui éveille l'idée d'un *acumen*; dans la troisième, celui-ci est rudimentaire. Ces trois feuilles ont manifestement subi un arrêt de développement; les faisceaux s'y terminent en pointe libre, tous dans les deux premières, les principaux dans la troisième. Les feuilles suivantes ont une organisation de plus en plus complète.

Quant à l'histologie des bulbilles adventives, elle est la reproduction exacte de ce que nous avons vu dans les bulbilles normales.

CONCLUSIONS

Les recherches qui font l'objet de ce mémoire ont abouti à des résultats dont quelques-uns méritent d'être mis en évidence.

1. — Au point de vue de l'origine, on peut distinguer quatre sortes de pousses dans l'*Ornithogalum caudatum*, non compris la pousse florifère : celles provenant 1° d'une germination de graine ; 2° du développement d'une bulbille normale ; 3° de celui d'une bulbille adventive ; 4° du bourgeon axillaire non bulbilliforme. Les trois premières sont capables de se développer en plante adulte : ce sont des pousses propagatrices. La quatrième n'apparaît que rarement sur la plante adulte et ne fait que contribuer, semble-t-il, à élaborer les matériaux de réserve nécessaires au bulbe mère et peut-être à fleurir l'année suivante. Dans toutes ces pousses jeunes, les appendices foliaires se montrent disposés suivant un ordre distique imparfait, toujours le même. Il en résulte que l'examen d'une plante adulte ne permet pas de déceler son origine.

2. — Dans l'*Ornithogalum caudatum*, toutes les feuilles comportent essentiellement trois régions : la gaine, le limbe et l'*acumen*. La gaine reste close. Le limbe, dans sa première jeunesse, est extrêmement court et enroulé sur lui-même, ses bords se couvrant l'un l'autre ; à l'état de vernation, cette disposition se maintient tandis que se produit l'accroissement intercalaire ; enfin, à l'état adulte, le limbe est très long et aplani. L'*acumen* prolonge le limbe et résulte d'une augmentation en épaisseur des mésophylles avec réduction, puis disparition, de la face interne ; les faisceaux marginaux extrêmes se rapprochent et se disposent en une ellipse ; l'organe, dès lors, devient massif.

3. — Le cotylédon présente également trois régions : la gaine, le limbe et l'*acumen* conservent durant toute la vie du cotylédon les proportions relatives qui caractérisent la feuille jeune. C'est

ainsi que, dans le cotylédon, le limbe est pour ainsi dire méconnaissable, puisqu'il n'est représenté que par la région de la fente cotylédonnaire. Dès lors, l'*acumen* du cotylédon de l'*Ornithogalum* ne représente nullement un pétiole, comme on l'a admis pour d'autres Monocotylées, ni un limbe comme M. Van Tieghem (**56**, p. 271) l'admet pour les genres *Allium*, *Lilium*, *Juncus* et *Asphodelus*.

Quant au suçoir de l'*Ornithogalum*, il n'est que l'extrémité de l'*acumen* et ne peut, par conséquent, être homologué au limbe du cotylédon, comme M. Van Tieghem (**57**, p. 947) le fait pour les Palmiers.

4. — Si la conception précédente est exacte, elle aura pour conséquence de faire admettre que l'organe désigné sous le nom de limbe dans les feuilles de Liliacées, Amaryllidées, etc., n'est pas l'homologue du limbe des Aroïdées, des Palmiers et, en général, des Monocotylées à feuilles nettement pétiolées.

5. — Le cotylédon est parcouru par sept faisceaux, ce qui est un nombre relativement élevé. Beaucoup de cotylédons étroits de Liliacées ne possèdent que deux faisceaux. De ces sept faisceaux, deux beaucoup plus forts que les autres s'étendent de la base au sommet; ils ont été considérés dans ce travail comme étant des faisceaux latéraux (L). Entre ces deux, il existe un faisceau qui, bien que grêle et court, semble être un faisceau médian (M). Cette nomenclature concorde avec l'idée que le cotylédon des Monocotylées est l'homologue d'une seule feuille. Si, plus tard, on doit admettre que ce cotylédon représente deux cotylédons concrescents, il faudra supposer deux faisceaux médians (ceux désignés ici par L) et un faisceau double provenant de la fusion de deux marginaux (celui que j'ai dénommé M). Je pense que cette question de la valeur morphologique du cotylédon unique des Monocotylées ne peut être tranchée par l'examen d'un seul cas, si démonstratif qu'on puisse le supposer.

6. — L'une des trois régions de la feuille ne fait totalement défaut que dans quelques appendices : la gaine aux bractées, le limbe et l'*acumen* aux premières gaines des bulbilles adventives.

7. — Sauf dans les pousses axillaires végétatives, la gaine a toujours une tendance à hypertrophier son parenchyme, qui devient un tissu de dépôt de réserves alimentaires. Le limbe concourt à l'assimilation du carbone, sauf dans le cotylédon, les premières feuilles de la plantule et les premiers appendices des bulbilles normales et adventives. L'*acumen*, malgré sa forme à peu près cylindrique, est également un organe d'assimilation; il remplace le limbe partout où celui-ci n'est pas en état d'élaborer. C'est le cas du cotylédon et des premières feuilles de la plantule; c'est le cas aussi de toutes les feuilles durant les premières phases de leur développement (voir p. 3).

8. — Le développement des tissus d'une feuille se fait aux dépens de trois histogènes, ainsi que l'a montré M. le professeur Gravis pour le *Tradescantia virginica*. Il en résulte l'existence de trois mésophylles distincts, reconnaissables à leurs propriétés histogéniques; le mésophylle moyen, notamment, semble seul capable de produire des faisceaux libéroligneux; ces faits se vérifient dans l'*Ornithogalum caudatum*.

9. — Dans le limbe et dans l'*acumen*, les fonctions aquifères sont confiées aux épidermes et au mésophylle moyen.

10. — Les cellules épidermiques ne renferment jamais, semble-t-il, d'amidon soluble, ainsi que Schenk et Nägeli l'ont trouvé dans d'autres espèces d'*Ornithogalum*.

11. — Les deux moitiés des feuilles d'*Ornithogalum caudatum* ne sont jamais rigoureusement égales. L'inégalité favorise indifféremment l'une ou l'autre moitié suivant les feuilles, en observant toujours une certaine alternance entre feuilles d'une même pousse. Cette asymétrie est liée à l'imperfection de la disposition distique des appendices.

12. — On peut grouper les faisceaux de la feuille d'*Ornithogalum caudatum* en trois catégories : les faisceaux foliaires, qui s'étendent dans toute la longueur des feuilles et pénètrent dans la tige; les faisceaux d'ordre très élevé, propres à la gaine foliaire; les faisceaux bulbillaires qui, issus des bulbilles, traversent une partie de la gaine foliaire bulbifère pour pénétrer finalement dans la tige.

13. — Dans l'aisselle de chaque feuille se trouve un bourgeon. Rarement il est unique et se développe de suite en une pousse végétative insérée normalement, c'est-à-dire dans l'angle entre la tige et la gaine de la feuille mère. Le plus souvent, il y a plusieurs bourgeons transformés en bulbilles concrescentes à la gaine de la feuille suivante, et insérés à diverses hauteurs.

14. — Les bulbilles normales ne sont donc pas des productions adventives ou accidentelles. Ce sont des bourgeons axillaires collatéraux ou superposés qui, faute de place, ne peuvent s'échelonner le long d'un entre-nœud, comme dans les Juglandées, mais sont concrescents, comme il vient d'être dit. Les bulbilles normales peuvent aussi être comparées aux bulbilles pédicellées qu'Irmisch a décrites dans les *Allium vineale* et *Scorodoprasum*; mais leurs pédicelles, concrescents entre eux, sont, en outre, soudés à une gaine foliaire.

15. — Des bulbilles adventives sont susceptibles de se développer expérimentalement ou accidentellement sur des morceaux de gaines adultes. Elles n'apparaissent que sur les sections basales des morceaux, et ce aux dépens d'un recloisonnement actif de l'épiderme interne. Leur mode de formation présente une curieuse analogie avec celle d'ovules orthotropes.

16. — L'accroissement des feuilles de l'*Ornithogalum caudatum* est basipète; on explique ce fait en disant que la partie basilaire d'une feuille en voie de croissance étant très comprimée, la croissance et la différenciation des tissus y est fortement retardée, alors que la partie terminale, pouvant faire saillie par un orifice étroit, s'allonge sous forme d'un *acumen* long parfois de plusieurs décimètres.

17. — Quoi qu'il en soit, l'activité génératrice se fait sentir dans le parenchyme de la gaine foliaire pendant la plus grande partie de l'existence de celle-ci; elle s'y révèle par la formation, vers la périphérie du mésophylle, de faisceaux tardifs aux dépens de cloisonnements tangentiels épars, bien que nombreux. Ceux-ci sont comparables à ceux du périméristème générateur de parenchyme et de faisceaux qui existe à la périphérie des tiges de *Dracoena*, etc.

BIBLIOGRAPHIE

1. **Andersson, S.**, Ueber die Entwickelung der primäre Gefässbundelsstränge der Monokotylen. (*Botan. Centralblatt,* 1889.)
2. **Baillon,** Traité de botanique médicale et pharmaceutique (Phanérogames). Paris, 1884.
3. **Baker, J. G.,** Revision of the Genera and Species of Scilleae and Chlorogaleae. (*Journ. Linn. Soc. Bot.,* t. XIII, 1873.)
4. **Curtis**'s Botanical Magazine, continued by John Sims. Londres, 1805.
5. **De Candolle, A.-P.,** Organographie végétale. Paris, 1827.
6. **Duchartre,** Éléments de botanique. Paris, 1885.
7. **Durand, Th.,** et **Schinz, H.,** Conspectus florae Africae, t. V. Bruxelles, 1895.
8. **Duvernoy, G.,** Untersuchungen über Keimung, Bau und Wachsthum der Monokotyledonen. Stuttgart, 1854.
9. **Ebeling, Max.,** Die Saugorgane bei der Keimung endospermhaltiger Samen. (*Flora,* 1885.)
10. **Gaudichaud, Ch.,** Recherches générales sur l'organographie, la physiologie et l'organogénie des végétaux. Paris, 1841.
11. **Germain de Saint-Pierre, E.,** Nouveau dictionnaire de botanique. Paris, 1870.
12. **Godfrin, J.,** Recherches sur l'anatomie comparée des cotylédons et de l'albumen. (*Ann. sc. nat.,* 6e série, t. XIX, 1884.)
13. **Goebel, K.,** Vergleichende Entwickelungsgeschichte der Pflanzenorgane. (*Schenk's Handbuch der Botanik,* Bd III, Heft 1. Breslau, 1884.)
14. **Goffart, J.,** Recherches sur l'anatomie des feuilles dans les Renonculacées. (*Mémoires de la Soc. roy. des sciences de Liége,* 3e série, t. III et IV, 1901-1902, et *Archives de l'Institut botanique de l'Université de Liége,* vol. III, 1901.)

15. **Gravis, A.,** Recherches anatomiques et physiologiques sur le *Tradescantia virginica* L. (*Mém. couronnés et mém. des savants étrangers publiés par l'Académie royale des sciences, etc., de Belgique,* t. LVII, 1898.)

16. **Gravis, A.,** et **Donceel, P.,** Anatomie comparée du *Chlorophytum elatum* et du *Tradescantia virginica.* (*Mém. de la Soc. roy. des sciences de Liége,* 3e série, t. II, 1900, et *Archives de l'Institut botanique de l'Université de Liége,* vol. II, 1900.)

17. **Guillaud,** Recherches sur l'anatomie comparée et le développement des tissus de la tige dans les Monocotylédones. (*Ann. sc. nat.,* 6e série, t. V, 1878.)

18. **Irmisch, Th.,** Zur Morphologie der monokotylische Knollen- und Zwiebelgewächse. Berlin, 1850.

19. **Jacquin,** Hortus botanicus Vindobonensis, t. I. Vienne, 1770.

20. **Jussieu, A. de,** Mémoire sur les embryons monocotylédonés. (*Ann. sc. nat.,* 2e série, t. XI, 1839.)

21. **Klebs, G.,** Beiträge zur Morphologie und Biologie der Keimung. (*Untersuchungen aus dem bot. Institut zu Tübingen,* Bd I. Leipzig, 1885.)

22. **Le Maoût** et **Decaisne,** Traité général de botanique. Paris, 1868.

23. **Lenfant, C.,** Contribution à l'anatomie des Renonculacées : Le genre *Delphinium.* (*Mémoires de la Soc. roy. des sciences de Liége,* 2e série, t. XIX, 1896, et *Archives de l'Institut botanique de l'Université de Liége,* vol. I, 1899.)

24. **Lewin, Maria,** Bidrag till hjertbladets anatomi hos monokotyledonerna. (*Bihang till K. svenska vet.-Akad. handlingar,* Bd XII, Afd. III, n° 5, 1887.)

25. **Lonay, Hyac.,** Contribution à l'anatomie des Renonculacées : Structure des péricarpes et des spermodermes. (*Mémoires de la Soc. roy. des sciences de Liége,* 3e série, t. III, 1901, et *Archives de l'Institut botanique de l'Université de Liége,* vol. III, 1901.)

26. **Mansion, A.,** Contribution à l'anatomie des Renonculacées. Le genre *Thalictrum.* (*Mémoires de la Soc. roy. des sciences de Liége,* 2e série, t. XX, 1897, et *Archives de l'Institut botanique de l'Université de Liége,* vol. I, 1899.)

27. **Mercklin, C.-E. de,** Observations sur l'histoire du développement des feuilles. (*Ann. sc. nat.,* 3e série, t. VI, 1846.)

28. **Millardet, A.,** Sur l'anatomie et le développement du corps ligneux dans les genres *Yucca* et *Dracoena.* (*Mémoires de la Soc. impér. des sciences nat. de Cherbourg,* t. XI, 1865.)

29. **Mirbel,** Nouvelles recherches sur les caractères anatomiques et physiologiques qui distinguent les plantes monocotylédones des plantes dicotylédones. (*Ann. du Museum,* t. XIII, 1809.)

30. **Mirbel,** Examen de la division des végétaux en endorhizes et exorhizes. (*Ann. du Museum,* t. XVI, 1810.)

31. **Mirbel,** Éléments de physiologie végétale et de botanique. Paris, 1815.

32. **Moebius,** Untersuchungen über die Stammanatomie einiger einheimischen Orchideen. (*Berichte der deutschen bot. Gesellschaft,* Bd IV, 1886.)

33. **Mohl, H. de,** Sur la formation des stomates. (*Ann. sc. nat.,* 2e série, t. XIII, 1840.)

34. **Nägeli, C.,** Ueber das Wachsthum des Stammes und der Wurzel bei den Gefässpflanzen. (*Beiträge z. wissensch. Botanik,* Heft 1, 1858.)

35. **Nägeli, C.,** Ueber das angebliche Vorkommen von gelöster oder formloser Stärke bei *Ornithogalum.* (*Ibid.,* Heft 2, 1860.)

36. **Naudin,** Résumé de quelques observations sur le développement des organes appendiculaires. (*Ann. sc. nat.,* 2e série, t. XVIII, 1842.)

37. **Queva, C.,** Sur un cas d'accroissement secondaire dans les faisceaux primaires d'une plante monocotylédonée. (*Association française pour l'avancement des sciences,* Congrès de Saint-Étienne, 1897.)

38. **Richard,** Analyse botanique des embryons endorhizes ou monocotylédonés et particulièrement celui des Graminées. (*Ann. du Museum,* t. XVII, 1811.)

39. **Rösler, P.,** Das Dickenwachsthum und die Entwickelungsgeschichte der secundäre Gefässbündel bei den baumartigen Lilien. (*Pringsheim's Jahrbücher f. wiss. Botanik,* Bd XX, 1889.)

40. **Sachs, J.,** Ueber die Keimung des Saamens von *Allium Cepa.* (*Bot. Zeitung,* 1863.)

41. **Sachs, J.**, Vorlesungen über Pflanzen-Physiologie. II. Auflage. Leipzig, 1887.

42. **Saint-Hilaire, A. de**, Leçons de botanique comprenant principalement la morphologie végétale. Paris, 1840.

43. **Sargant Ethel**, The origin of the seedleaf in Monocotyledons. (*The new Phytologist*, t. I, n° 5, 1902.)

44. **Schenk**, Ueber formlose Stärke. (*Bot. Zeitung*, 1857, p. 497.)

45. **Schenk**, Ueber formlose Stärke. (*Ibid.*, p. 555.)

46. **Schleiden**, Grundzüge der wissenschaftlichen Botanik. Leipzig, 1845.

47. **Schubert, A.**, Pflanzenkunde. Berlin, 1888.

48. **Steinheil, A.**, Observations sur le mode d'accroissement des feuilles. (*Ann. sc. nat.*, 2e série, t. VIII, 1837.)

49. **Sterckx, R.**, Contribution à l'anatomie des Renonculacées. Tribu des Clématidées. (*Mémoires de la Soc. roy. des sciences de Liége*, 2e série, t. XX, 1897, et *Archives de l'Institut botanique de l'Université de Liége*, vol. I, 1899.)

50. **Sterckx, R.**, Recherches anatomiques sur l'embryon et les plantules dans la famille des Renonculacées. (*Mémoires de la Soc. roy. des sciences de Liége*, 3e série, t. II, 1900, et *Archives de l'Institut botanique de l'Université de Liége*, vol. II, 1900.)

51. **Thiselton Dyer**, Flora capensis, t. VI. Londres, 1897.

52. **Thunberg, C.**, Flora capensis, *édition Schultes*. Stuttgart, 1823.

53. **Tschirch, A.**, Physiologische Studien über die Samen, insbesondere die Saugorgane derselben. (*Ann. du Jardin bot. de Buitenzorg*, vol. IX, 2e partie, 1891.)

54. **Trécul, A.**, Mémoire sur la formation des feuilles. (*Ann. sc. nat.*, 3e série, t. XX, 1853.)

55. **Turpin, P.-J.-Fr.**, Mémoire sur la possibilité d'obtenir un jour, à volonté, la reproduction d'un végétal phanérogame, etc. (*Ann. sc. nat.*, t. XXIII. Paris, 1823.)

56. **Van Tieghem, P.**, Observations anatomiques sur le cotylédon des Graminées. (*Ann. sc. nat.*, 5e série, t. XV, 1872.)

57. **Van Tieghem, P.**, Traité de botanique, 2e édition. Paris, 1891.

PLANCHES

ABRÉVIATIONS EMPLOYÉES DANS LES FIGURES.

a.	*Acumen.*
bu.	Bulbilles.
chl.	Chlorophyllien.
cot.	Cotylédon.
e.	Externe.
Ep.	Épiderme.
f. ou fig.	Figure.
F.	Feuille.
g.	Gaine.
i.	Interne.
i.	Faisceau intermédiaire.
inc.	Incolore.
l.	Limbe.
L.	Faisceau latéral.
m.	Moyen.
m.	Faisceau marginal.
M.	Faisceau médian.
Més.	Mésophylle.
niv.	Niveau.
R.	Racine.
Ra.	Cellule à raphides.
Sp.	Spermoderme.
st.	Stomate.
Su.	Suçoir.
Sub.	Suber.

EXPLICATION DE LA PLANCHE I.

Feuille végétative.

Fig. 1. — Feuille végétative complète (p. 11).

Fig. 2. — Coupe transversale dans la gaine de la feuille précédente au niveau η (p. 13).

Fig. 3. — Coupe transversale au milieu de la région dorsale d'une gaine de 20 centimètres de circonférence, comprenant $^1/_{10}$ de celle-ci.

Fig. 4. — Partie de gaine âgée portant deux bulbilles (p. 16).

Fig. 5. — Coupe transversale de la précédente en dessous de l'insertion des bulbilles. Les faisceaux bulbillaires sont marqués d'un petit trait au dos (p. 16).

Fig. 6. — Coupe transversale au-dessus de l'insertion des bulbilles (p. 16).

Fig. 7. — Coupe transversale au niveau ζ de la feuille complète [base du limbe] (p. 17).

Fig. 8. — Voir planche II.

Fig. 9. — Coupe transversale dans le limbe d'une feuille très jeune [cf. fig. 61, pl. V] (p. 19).

Fig. 10. — Coupe transversale dans le limbe ayant moins de 1 centimètre de longueur d'une jeune feuille (p. 19).

Fig. 11. — Coupe transversale d'une gaine âgée; partie périphérique comprenant un petit faisceau (p. 20).

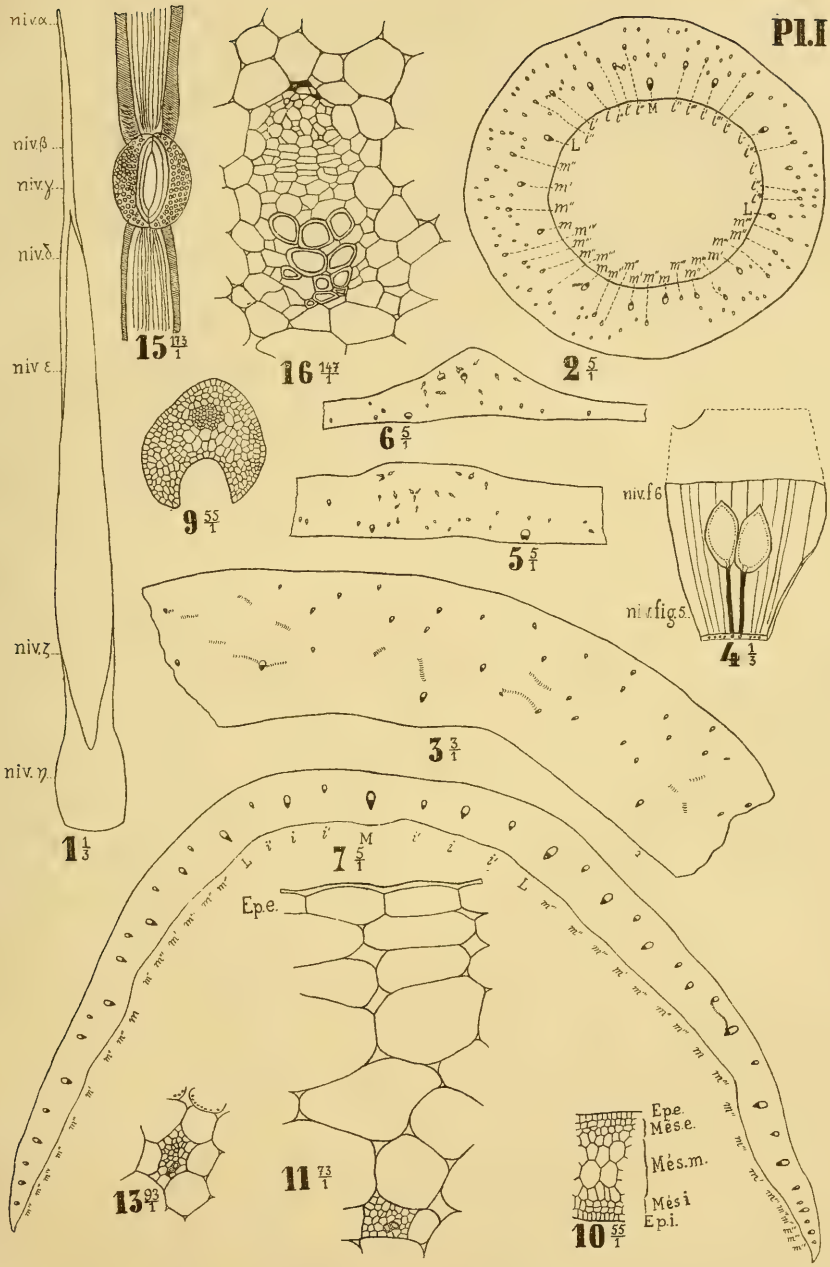
Fig. 12. — Voir planche II.

Fig. 13. — Détail de la figure 7; un petit faisceau m''' (p. 21).

Fig. 14. — Voir planche II.

Fig. 15. — Un stomate vu de face (p. 22).

Fig. 16. — Un faisceau m de la figure 2 (p. 23).

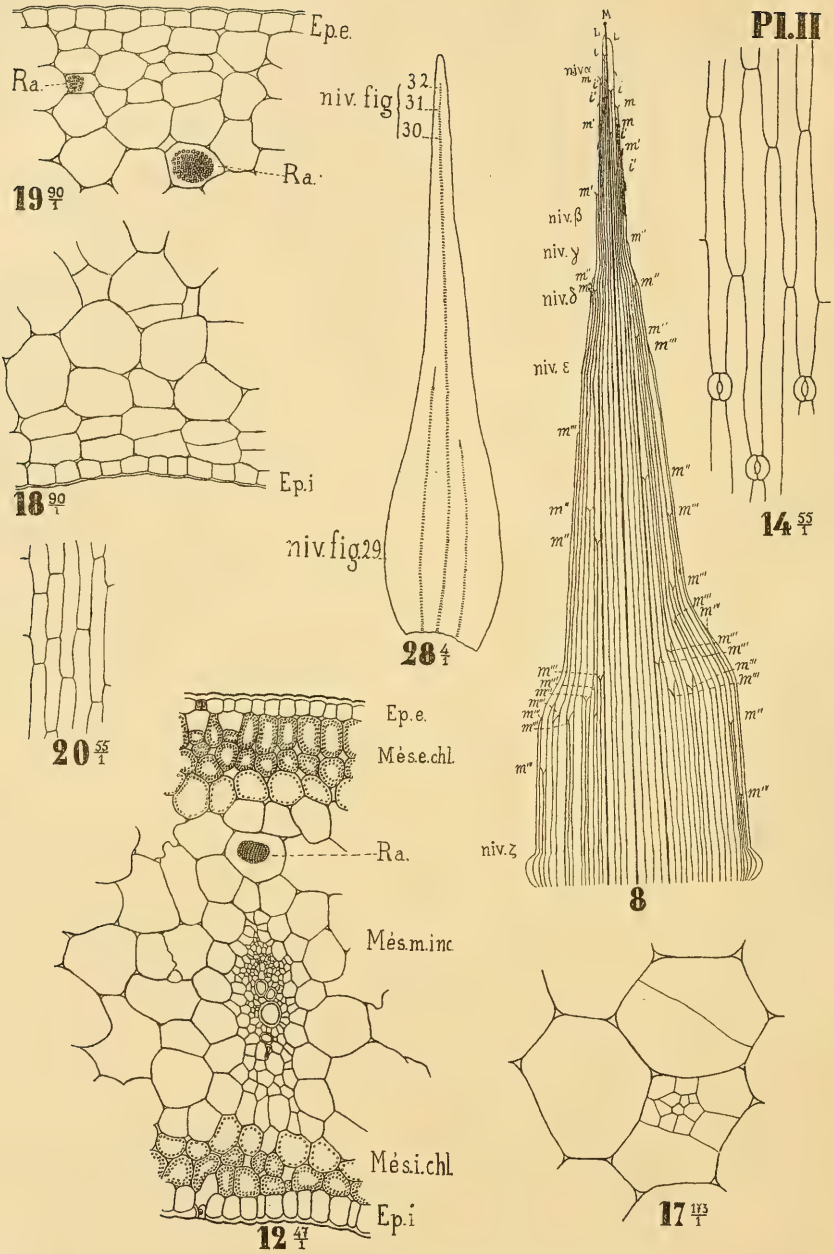


HYAC. LONAY, ad.nat.del.

J.L.Goffart, lith. Bruxelles.

ORNITHOGALUM CAUDATUM

Feuille végétative.



HYAC. LONAY, ad nat. del.

J.L.Coffart, lith. Bruxelles.

ORNITHOGALUM CAUDATUM

Fig. 8, 12, 14, 17 à 20: Feuille végétative. Fig: 28: Bractée.

EXPLICATION DE LA PLANCHE II.

Feuille végétative (suite).

Fig. 8. — Parcours des faisceaux dans une feuille complète (p. 19).

Fig. 9 à 11. — Voir planche I.

Fig. 12. — Détails de la figure 7 ; partie comprenant un gros faisceau *m* (p. 21).

Fig. 13. — Voir planche I.

Fig. 14. — *Ep. e* d'un limbe de feuille adulte vu de face (p. 22).

Fig. 15 et 16. — Voir planche I.

Fig. 17. — Un petit faisceau au stade procambial dans une gaine jeune (p. 23).

Fig. 18. — Coupe transversale des épiderme et mésophylle externes d'une gaine jeune (p. 23).

Fig. 19. — Coupe transversale des épiderme et mésophylle internes d'une gaine jeune (p. 24).

Fig. 20. — *Ep. e.* de la gaine adulte vu de face (p. 24).

Fig. 21 à 27. — Voir planche III.

Bractée.

Fig. 28. — Une bractée (p. 31).

EXPLICATION DE LA PLANCHE III.

Feuille végétative (suite).

Fig. 21. — Coupe transversale au niveau δ (limbe) de la feuille de la figure 1 (p. 25).

Fig. 22 à 26. — Coupes transversales à des niveaux intermédiaires à δ et β (p. 25).

Fig. 27. — Coupe transversale au niveau β (*acumen*) de la même feuille (p. 25).

Bractée (suite).

Fig. 28. — Voir planche II.

Fig. 29. — Coupe transversale à la base d'une bractée (p. 31).

Fig. 30 à 32. — Voir planche IV.

Plantule.

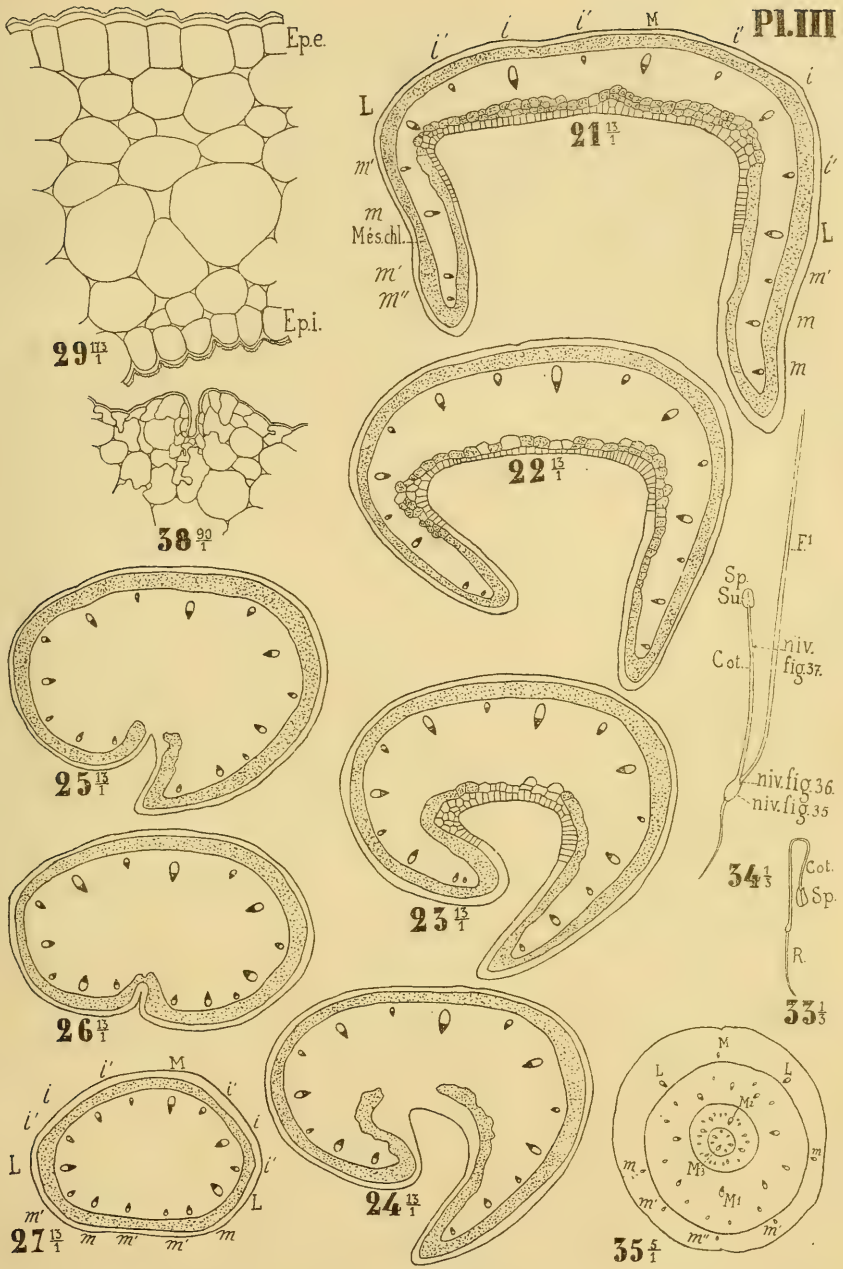
Fig. 33. — Une plantule avant le développement de la feuille 1 (p. 33).

Fig. 34. — Plantule ayant développé la feuille 1 (p. 33).

Fig. 35. — Coupe transversale au milieu du bulbe de la plantule précédente (p. 33).

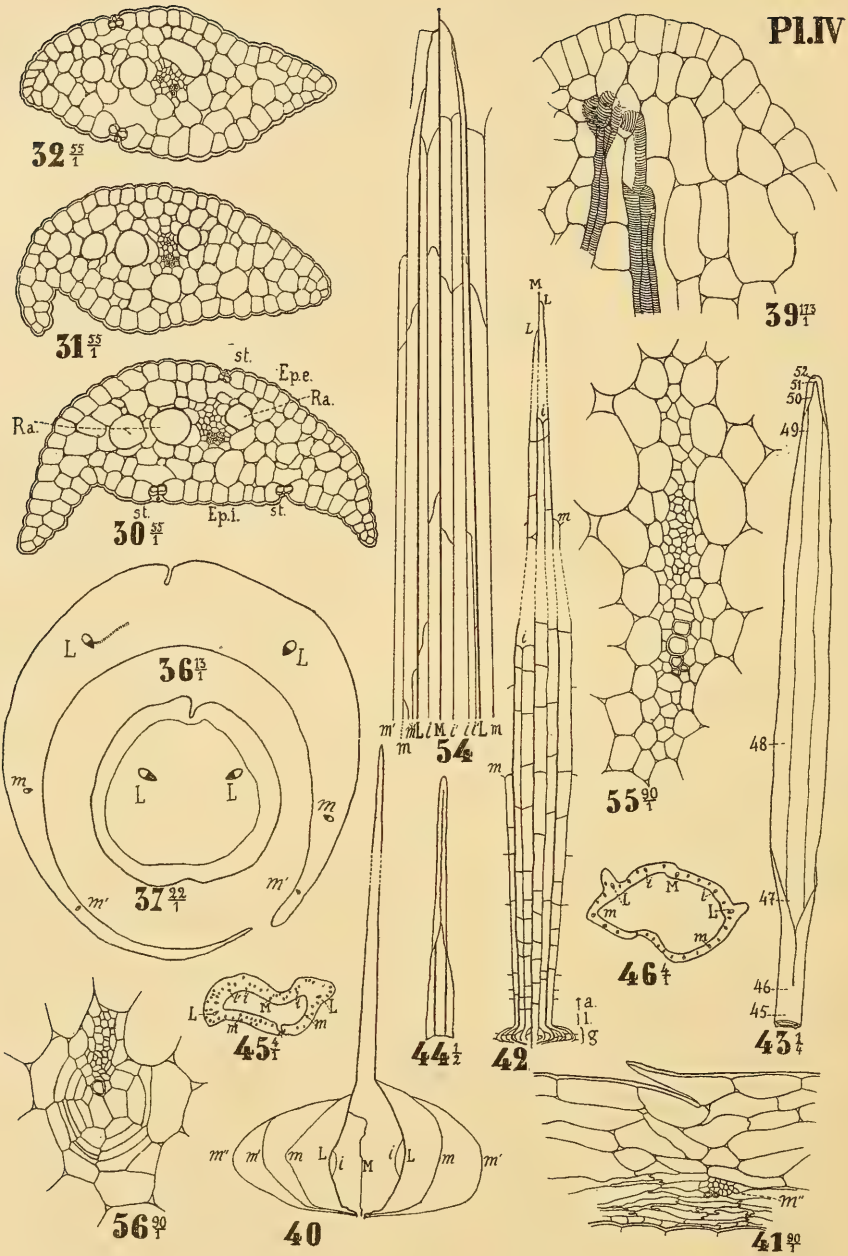
Fig. 36 et 37. — Voir planche IV.

Fig. 38. — Voisinage du repli médian dorsal au niveau de la figure 37 (p. 36).



ORNITHOGALUM CAUDATUM

Fig. 21 à 27: Feuille végétative. – Fig. 29: Bractée. – Fig. 33, 34, 35 et 38: Cotylédon.



HYAC. LONAY, ad. nat. del.

J. L. Goffart, lith. Bruxelles.

ORNITHOGALUM CAUDATUM

Fig. 30 à 32: Bractée. Fig. 36 à 41: Cotylédon. Fig. 42: Feuille de la plantule. Fig. 43 à 56: Pousse axillaire.

EXPLICATION DE LA PLANCHE IV.

Bractée (suite).

Fig. 30, 31 et 32. — Coupes transversales à des niveaux de plus en plus rapprochés du sommet de la bractée (p. 31).

Plantule (suite).

Fig. 33 à 35. — Voir planche III.

Fig. 36. — Coupe transversale au niveau du limbe du cotylédon (p. 33).

Fig. 37. — Coupe transversale vers le quart supérieur de l'*acumen* du cotylédon (p. 34).

Fig. 38. — Voir planche III.

Fig. 39. — Coupe longitudinale dans le sommet du suçoir (p. 35).

Fig. 40. — Parcours des faisceaux dans le cotylédon (p. 35).

Fig. 41. — Détails de la figure 35 au voisinage du faisceau m'' (p. 34).

Fig. 42. — Parcours des faisceaux dans la feuille 2 d'une plantule (p. 38).

Pousse axillaire.

Fig. 43. — Préfeuille d'une pousse axillaire. Les numéros qui accompagnent le dessin indiquent les niveaux des figures correspondantes (p. 40),

Fig. 44. — Extrémité de la feuille 2 d'une pousse axillaire (p. 41).

Fig. 45 et 46. — Coupes transversales aux deux niveaux de la gaine de la préfeuille indiqués dans la figure 43 (p. 42).

Fig. 47 à 53. — Voir planche V.

Fig. 54. — Parcours des faisceaux dans la partie supérieure de l'*acumen* de la feuille 2 de la pousse axillaire (p. 43).

Fig. 55. — Un faisceau L dans le milieu du limbe de la préfeuille (p. 44).

Fig. 56. — Un faisceau de la préfeuille muni d'une boucle ligneuse à l'état de procambium (p. 44).

EXPLICATION DE LA PLANCHE V.

Pousse axillaire (suite).

Fig. 47, 48, 49, 50, 51 et 52. — Coupes transversales dans le limbe et l'*acumen* de la préfeuille aux niveaux indiqués dans la figure 45 (p. 43).

Fig. 53. — Parcours des faisceaux dans la partie supérieure de la préfeuille (p. 45).

Fig. 54 à 56. — Voir planche IV.

Bulbille normale.

Fig. 57. — Une bulbille vue de profil (p. 47).

Fig. 58. — Une bulbille vue de face (p. 47).

Fig. 59. — Sommets des feuilles successives d'une bulbille (p. 47) :

a. — F. 2 vue par sa face ventrale (face antérieure de la bulbille);

b. — F. 3 vue par sa face ventrale (postérieure de la bulbille);

c. — F. 4 vue par sa face ventrale (antérieure);

d. — F. 4 vue de profil;

e. — F. 5 vue par sa face ventrale (postérieure);

f. — F. 5 vue de profil.

Fig. 60. — F. 6 vue par sa face ventrale (antérieure) (p. 47).

Fig. 61. — F. 7 vue par sa face ventrale (postérieure) (p. 48).

Fig. 62. — F. 8 en forme de bourrelet entourant obliquement le sommet végétatif de la tige (p. 48).

Fig. 63. — Partie bulbillifère d'une gaine âgée (p. 48).

Fig. 64. — Schéma du parcours des faisceaux bulbillaires dans une gaine vue de face (p. 49).

Fig. 65. — Schéma représentant le profil du précédent (p. 49).

Fig. 66. — Coupe transversale schématisée de la partie bulbillifère d'une gaine adulte en dessous de l'insertion des bulbilles 4. Les numéros des groupes de faisceaux correspondent à ceux des bulbilles dans lesquelles ils se rendent (p. 49).

Fig. 67. — Coupe transversale d'une bulbille un peu en dessous du limbe de la préfeuille (p. 51).

Fig. 68. — Coupe transversale dans une bulbille adulte (p. 52).

Fig. 69. — Détail de structure de la préfeuille dans la coupe précédente (p. 53).

Fig. 70. — Parcours des faisceaux dans une bulbille normale (p. 52).

Bulbille adventive.

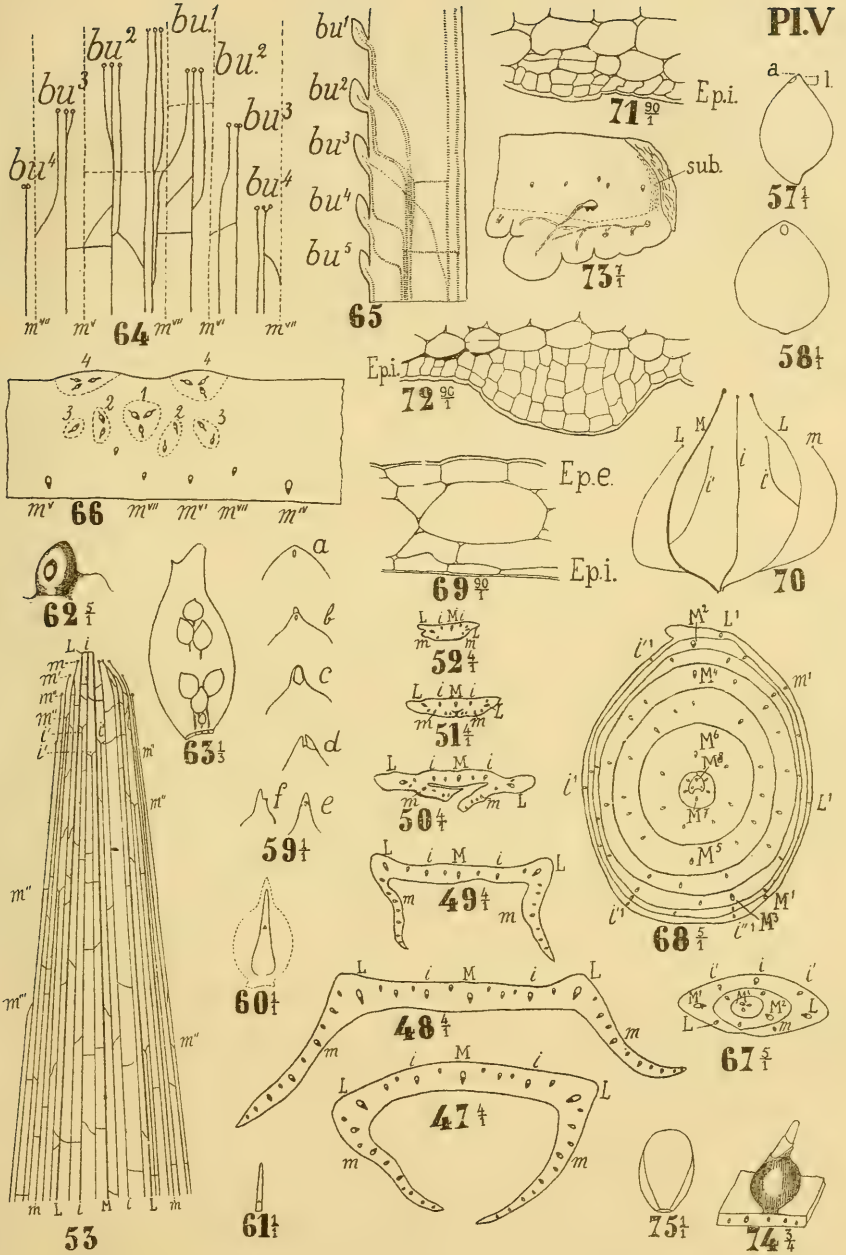
Fig. 71. — Premiers cloisonnements dans l'*Ep. i.* d'un morceau de gaine charnue (p. 56).

Fig. 72. — Formation d'un mamelon, ébauche d'une bulbille adventive (p. 56).

Fig. 73. — Insertion des bulbilles le long d'une bande de méristème adventif (p. 57).

Fig. 74. — Une bulbille adventive (p. 57).

Fig. 75. — Une préfeuille écailleuse vue par la face ventrale (p. 57).



HYAC. LONAY, ad. nat. del.

J.J. Goffart, lith. Bruxelles.

ORNITHOGALUM CAUDATUM

Fig. 47 à 53 : Pousse axillaire. – Fig. 57 à 70 : Bulbille normale. – Fig. 71 à 75 : Bulbille adventive

TABLE DES MATIÈRES

Pages.

INTRODUCTION 3

CHAPITRE PREMIER. — **La plante adulte.**

§ 1. Feuille végétative la plus complète 11
I. Caractères extérieurs 11
II. Anatomie 13
A. Parcours des faisceaux 13
B. Histogenèse 19
C. Histologie 20
Historique 26

§ 2. Les bractées 30
I. Caractères extérieurs 30
II. Anatomie 30
A. Parcours des faisceaux 30
B. Histologie 31

CHAPITRE II. — **Les plantules.**

§ 1. Le cotylédon 33
I. Caractères extérieurs 33
II. Anatomie 34
A. Parcours des faisceaux 34
B. Histologie 35

§ 2. Les premières feuilles de la plantule 36
I. Caractères extérieurs 37
II. Anatomie 37
A. Parcours des faisceaux 37
B. Histologie 38
Historique 38

CHAPITRE III. — **Les pousses axillaires végétatives.**

I. Caractères extérieurs de la préfeuille et des feuilles suivantes 40
II. Anatomie de la préfeuille et des feuilles suivantes 42
A. Parcours des faisceaux 42
B. Histologie 44

CHAPITRE IV. — **Les bulbilles.**

Pages.

§ 1. Bulbilles normales 46
I. Caractères extérieurs 47
II. Anatomie 48
A. Position et insertion 48
B. Genèse des bulbilles 50
C. Parcours des faisceaux dans les premières gaines des bulbilles. 51
D. Histologie 53
Historique. 53

§ 2. Bulbilles adventives 54
I. Caractères extérieurs et conditions de formation 54
II. Anatomie. 56
A. Insertion et genèse 56
B. Parcours des faisceaux dans les premières gaines . . . 58

RÉSUMÉ.

Feuille végétative la plus complète 60
Bractées. 61
Plantules 62
Pousse axillaire végétative. 62
Bulbilles normales 63
Bulbilles adventives 65

CONCLUSIONS 67
BIBLIOGRAPHIE 71
ABRÉVIATIONS EMPLOYÉES DANS LES FIGURES. 75
EXPLICATION DES PLANCHES. 76

CONSIDÉRATIONS

SUR

LE CHANGEMENT DE VOLUME

QUE LES SELS ÉPROUVENT EN PASSANT DE L'ÉTAT SOLIDE A L'ÉTAT DE DISSOLUTION

PAR

Gustave HAPPART

DOCTEUR EN SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES.

CONSIDÉRATIONS

SUR

LE CHANGEMENT DE VOLUME

QUE LES SELS ÉPROUVENT EN PASSANT DE L'ÉTAT SOLIDE
A L'ÉTAT DE DISSOLUTION

Quoique les travaux traitant ce sujet soient nombreux et parfois peu concluants, plusieurs physiciens se sont cependant occupés des dissolutions et des contractions éprouvées par les sels en passant de l'état solide à l'état liquide par voie de dissolution dans l'eau.

Nous rencontrons d'abord les recherches entreprises par Favre et Valson pendant les années 1872 à 1877 ; ces recherches se trouvent consignées dans les « Comptes rendus de l'Académie des sciences ». Nous allons donner en résumé les considérations émises par ces deux physiciens.

La dissolution d'un sel dans l'eau est presque toujours accompagnée d'une diminution de volume et d'un accroissement de concentration, car le volume de la dissolution est moindre que la somme des volumes du sel et de l'eau avant la dissolution.

Les sels anhydres qui dérivent de l'ammoniaque font exception, ils éprouvent un accroissement de volume ; par suite, une diminution de concentration de la solution se produit.

Gmelin-Kraut's *Handbuch der Chemie*, Bd I, S. 451, signale

aussi, comme faisant exception à la règle ordinairement suivie par les sels, le chlorure hydraté de magnésium dans la proportion de $MgCl^2 + 6H^2O$.

L'accroissement de concentration se passe comme si la dissolution produisait une certaine quantité de chaleur (par exemple, pour les solutions de sels anhydres) ou produisait un refroidissement (par exemple, pour les solutions de sels qui contiennent de l'eau de cristallisation).

Dans tous les cas, à proportion égale, la diminution de volume provenant de la dissolution, est plus grande pour le sel anhydre que pour le même sel contenant de l'eau d'hydratation ; nous en concluons que le sel, en prenant une certaine quantité d'eau d'hydratation, a déjà subi, par ce fait, une contraction plus ou moins grande.

La concentration croît dans tous les cas lorsqu'on dissout un plus grand nombre de molécules salines dans une quantité constante d'eau ; cependant, cet accroissement de concentration n'est pas dans un rapport simple avec l'accroissement du nombre de molécules de sel dissoutes.

Kremers, dans les *Annales de Poggendorf* (96.45) fait aussi remarquer que la contraction subie, par exemple par la dissolution du NaCl, est différente de la contraction éprouvée par la même quantité de KCl, la masse d'eau employée pour ces deux dissolutions étant constante.

Cette remarque de Kremers a lieu non seulement pour NaCl et KCl, mais pour tous les sels.

Une question importante dont Favre et Valson se sont occupés, est relative à la chaleur dégagée par l'effet de la dissolution des sels. Les conclusions générales tirées de leur travail, sont les suivantes :

Lorsqu'un sel se dissout dans l'eau, il apparaît différents phénomènes dont le plus important est celui de la chaleur dégagée par suite de la dissolution ; seulement, cette chaleur dégagée peut provenir de sources multiples : le calorimètre n'en donne qu'une partie, une autre partie, par exemple, pouvant être absorbée par un certain travail interne.

Les sels dégageant le plus de chaleur sont aussi ceux qui subissent la plus forte contraction ; il peut donc se faire qu'une grande partie de la chaleur dégagée, corresponde à la production de la contraction.

Par la mesure de la diminution de volume, nous pourrons donc avoir une expression de la force coercitive exercée par le sel sur l'eau qui le dissout.

Les sels se rangent, d'après la contraction, en série décroissante, comme suit : borates, carbonates, sulfates, chlorures, nitrates, bromures, iodures.

Comme nous l'avons déjà fait remarquer, la contraction est plus grande pour un sel anhydre que pour le même sel hydraté ; seul, le chlorure de calcium ne fournit par une différence bien grande entre les deux états.

La chaleur de dilution dégagée par la contraction est bien plus considérable que la chaleur donnée par le calorimètre. Ce phénomène n'est pas aussi simple que la contraction subie par l'eau par suite du refroidissement; dans ce cas, la chaleur développée est donnée complètement par le calorimètre. Mais dans le cas qui nous occupe, le sel, par suite de sa dissolution, se dissocie et absorbe par le fait même une grande quantité de la chaleur dégagée par la contraction.

Gmelin-Kraut's *Handbuch der Chemie*, Bd I, S. 533, donne une notion qui nous sera utile plus loin : c'est la chaleur développée par suite de la diminution de 1 centimètre cube subie par 1 litre d'eau. D'après un tableau de H. Kopp, le coefficient de dilatation de l'eau à 15° est à peu près 0,0001320.

Par conséquent, pour diminuer le volume de 1 litre d'eau de 0,0001320, il faut abaisser la température d'un degré ou lui soustraire une calorie, et pour diminuer de 1 centimètre cube le volume de ce litre d'eau, on devra abaisser la température de $1 : 0{,}0001320 = 7576°$ ou lui soustraire 7576 calories.

Voici un exemple où cette dernière notion intervient :

Le carbonate de sodium CO^3Na^2 anhydre fournit une contraction de 42 c. c. quand on en dissout 106 grammes dans

2 litres d'eau. La chaleur dégagée sera donc $42 \times 7576 = 318192$ calories et le calorimètre donne seulement 7316 calories.

La chaleur absorbée par suite de la dissociation du sel en se dissolvant est donc $318192 - 7316 = 310876$ calories.

Favre et Valson ont dressé un tableau donnant la diminution de volume de différents sels (sulfates, carbonates, azotates, chlorures, bromures et iodures). Ils n'ont fait qu'une expérience pour chaque sel.

Les expériences que nous avons entreprises au laboratoire de l'Université de Liége comportent plusieurs observations pour chaque sel en particulier, et ce à différentes concentrations.

Nous croyons utile de reproduire ici le tableau dû à Favre et Valson; il pourra nous servir d'abord de comparaison avec les résultats que nous avons obtenus. La méthode suivie par ces deux physiciens est basée sur l'emploi du picnomètre, et la façon de déterminer le changement de volume est complètement différente de la méthode dont nous avons fait usage et qui est due à M. le professeur De Heen.

La description de l'appareil employé viendra plus loin.

[Voir le tableau dressé par Favre et Valson (*Comptes rendus*, 77, p. 802), *Gmelin-Kraut*, I, pp. 537 et 538, ci-contre.]

Comme on peut le voir, Favre et Valson prennent la molécule-gramme pour poids du sel employé; la troisième colonne donne les densités des différents sels, et la suivante, des volumes moléculaires; la cinquième colonne, marquée *d*, donne les densités des solutions; *v* désigne le volume du sel après la dissolution, d'où par conséquent V-*v* donnera la contraction éprouvée par le sel en se dissolvant; C exprime la quantité (V-*v*) 7576 ou le nombre de calories dégagées par suite de la dissolution, tandis que C′ désigne la chaleur développée donnée par le calorimètre. La dernière colonne *c*-*c*′ nous donnerait donc la chaleur absorbée par suite de la dissociation du sel.

Nous devons faire remarquer que la quantité d'eau employée est de 1 litre.

Sels.	P.	D.	$V=\frac{P}{D}$	$d.$	$v.cm.$	$V-v.$	$\frac{V-v}{V}$	C cal.	c' cal.	$c-c'.$
$\frac{CO^3Na^2}{2}$	53	2,407	22	1,0619	1	2,1	0,95	227280	3658	223622
$\frac{SO^4Cu}{2}$	80	3,707	21,6	1,0776	2,3	19,3	0,88	146217	8198	138019
$\frac{SO^4Na^2}{2}$	71	2,681	26,5	1,0606	9,8	16,7	0,70	126519	354	126165
$\frac{SO^4K^2}{2}$	87	2,653	32,8	1,0662	19,6	13,2	0,40	100003	-3361	103364
$\frac{Cl^2Sr}{2}$	79,5	3,035	26,1	1,0667	11,8	14,3	0,54	108337	5483	102854
$\frac{Cl^2Ba}{2}$	104,5	3,844	27,1	1,0887	14,8	12,3	0,45	93185	1172	92013
$\frac{Cl^2Ca}{2}$	55,5	2,160	25,7	1,0439	11,2	14,5	0,56	109852	9053	100799
$ClNa$	58,5	2,143	27,3	1,0396	18,3	9	0,33	68104	-1002	69186
ClK	74,5	1,976	37,7	1,0444	28,9	8,8	0,23	66669	-4462	71131
$ClNH^4$	53,5	1,525	35,1	1,0157	37,2	- 2,1	-0,06	-15910	-4063	-11874
$\frac{N^2O^6Sr}{2}$	105,75	2,980	35,5	1,0811	22,8	12,7	0,36	96215	-2348	98563
$\frac{N^2O^6Ba}{2}$	131	3208	40,8	1,1038	24,6	16,2	0,40	122731	-4583	127314
$\frac{N^2O^6Ca}{2}$	82	2,504	32,7	1,0578	23	9,7	0,29	73487	2014	71473
$BrNa$	103	3,198	32,2	1,0770	24,2	8	0,24	60608	109	60499
BrK	119	2,524	47,2	1,0800	36,1	11,1	0,23	84094	-4992	89086
INa	150	3,654	41	1,1105	35,6	5,4	0,13	40910	1762	39148
IK	166	2,946	56,4	1,1135	47,2	9,2	0,16	69699	-5169	74868

Nous prendrons un exemple pour montrer comment les différents nombres du tableau se trouvent.

Prenons NaCl; le poids du sel étant $58^{gr},5$ et celui de l'eau 1000 grammes, la dissolution pèsera donc $1058^{gr},5$. Le volume du sel est $58,5 : 2,143 = 27^{cc},3$ et le volume des 1000 grammes d'eau est aussi 1000 c. c.; le volume total de la solution, s'il n'y avait pas de contraction, serait donc $1027^{cc},3$.

Or la densité de la solution est 1,0396; le volume véritable après la dissolution du sel sera donc $1058,5 : 1,0396 = 1018^{cc},2$.

Il y a ainsi une contraction de $1027,3 - 1018,2 = 9^{cc},1$ qui développerait donc une quantité de chaleur de $9,1 \times 7576 = 68104$ calories; le calorimètre donne — 1002 calories.

Telles sont les conclusions auxquelles arrivent Favre et Valson.

M. G.-A. Hagemann, de Copenhague, s'est occupé également de la dissolution des sels dans un travail intitulé : *Studien über das Molekularvolumen einiger Körper.*

Nous savons par le tableau dressé par Favre et Valson que, par exemple, en dissolvant $58^{gr},5$ de NaCl dans 1 litre d'eau, la chaleur dégagée mesurée au calorimètre a été trouvée égale à — 1002 calories, tandis que le calcul donne la quantité, bien plus considérable, de $9 \times 7576 = 68104$ calories. M. G.-A. Hagemann s'est demandé d'abord si cette différence ne résulte pas d'autres forces physiques telles que les phénomènes électriques, lumineux, etc., ou si l'on devrait admettre un autre équivalent mécanique de la chaleur.

M. G.-A. Hagemann entre ensuite dans des considérations qui n'intéressent pas directement notre sujet, mais que nous croyons utile de reproduire en résumé.

Le poids moléculaire est 80 pour l'anhydride sulfurique; il est de 18 pour l'eau. La densité de SO_3 est 1,9546.

1 de SO_3 anhydre . .	pèse 80 gr.,	son volume $\frac{80}{1,9546}$	= 40,9 c. c.
1 d'eau.	— 18 —	—	18,0
SO_3 et $1H_2O$.	98 gr.,	volume calculé	58,9 c. c.

Mais $SO_3 + H_2O$ a la densité 1,842, à 15°. Donc, le volume véritable de $SO_3 + H_2O$ est $\frac{98}{1,842} = 53^{cc},2$ au lieu de $58^{cc},5$. Donc, il y a une contraction de $5^{cc},7$.

De même nous aurons :

$SO_3 + H_2O$	98 gr.	$\frac{98}{1,842} = 53,2$ c. c.
1 de H_2O	18 —	18,0
	116 gr.	71,2 c. c.
Densité de $SO_3 + 2H_2O$	1,779;	$\frac{116}{1,779} = 65,2$ c. c.
	Contraction . . .	6,0 c. c.

En continuant de la sorte, on aura le tableau suivant :

SO_3 ANHYDRE	CONTRACTION.	DIFFÉRENCE.
—	—	—
+ 1 molécule d'eau.	= 5,7 c. c.	5,7 c. c.
+ 2 — —	= 11,7 —	6,0 —
+ 3 — —	= 13,8 —	2,1 —
+ 4 — —	= 15,0 —	1,2 —
+ 5 — —	= 15,8 —	0,8 —
+ 10 — —	= 18,7 —	2,9 —
+ 20 — —	= 22,6 —	3,9 —
+ 30 — —	= 23,6 —	1,0 —
+ 50 — —	= 23,3 —	0,3 —

Nous voyons par ce tableau que la contraction subie par SO_3, avec les deux premières molécules d'eau, est à peu près aussi grande que la contraction subie avec toutes les molécules suivantes. Donc, on peut dire que SO_3 accomplit avec deux molécules d'eau la moitié du travail accompli avec 50 molécules d'eau.

En suivant les valeurs des contractions, nous pouvons admettre que SO_3 a accompli ou, pour mieux dire, a épuisé toute son

énergie, avec 50 molécules d'eau, et cette énergie est représentée ici par 23,6.

Thomsen a déterminé le nombre de calories développées dans chaque cas. Pour $SO_3 + H_2O$, il a trouvé 21320 calories, ce qui donne $\frac{21320}{5,7} = 3740$ calories par centimètre cube de contraction.

Pour la seconde molécule d'eau ajoutée à SO_3, il n'y a plus que 6379 calories dégagées, ce qui fait $\frac{6379}{6} = 1060$ calories par centimètre cube; pour la troisième molécule, nous avons $\frac{3039}{2,1} = 1450$ calories par centimètre cube; pour la quatrième, $\frac{1729}{1,2} = 1420$ calories par centimètre cube, et ainsi de suite.

D'après Thomsen, la somme totale des calories dégagées pour 1600 molécules d'eau est égale à 39165 calories, tandis que la contraction est 23cc,6 pour 50 molécules d'eau.

Nous pouvons établir le même tableau que ci-dessus pour l'oxyde de sodium, de potassium, d'ammoniaque.

L'oxyde de sodium Na_2O a pour poids moléculaire 62 et pour densité 2,805; nous aurons donc :

Na_2O anhydre.	62 gr., volume	$\frac{62}{2,805}$	= 22,1 c. c.
H_2O —	18 —	—	18,0
$Na_2O + H_2O$ —	80 gr.	—	40,1 c. c.

La densité de $Na_2O + H_2O$ est égale à 2, et le volume calculé est 80 : 2 = 40. Donc pour la première molécule d'eau, il n'y aurait pas de contraction.

Pour la seconde molécule, nous aurons :

$Na_2O - H_2O$ anhydre.	80 gr., volume	$\frac{80}{2}$	= 40 c. c.
H_2O —	18 —	—	18
$Na_2O - 2H_2O$ —	98 gr.	—	58 c. c.

Or, la densité de $Na_2O + 2H_2O$ est 1,85; donc le volume réel de $Na_2O + 2H_2O$ n'est pas 58 c. c., mais bien 98 : 1,85 = 52cc,9; il y a donc une contraction de 5cc,1.

En continuant de la même façon pour les molécules suivantes, nous aurons le tableau ci-dessous :

			CONTRACTION.	DIFFÉRENCE.
Na_2O anhydre	+ 1	molécule d'eau	= 0,0 c. c.	
				5,1 c. c.
—	+ 2	—	= 5,1 —	
				3,5 —
—	+ 3	—	= 8,6 —	
				3,2 —
—	+ 4	—	= 11,8 —	
				2,6 —
—	+ 5	—	= 14,4 —	
				10,1 —
—	+ 10	—	= 24,5 —	
				10,3 —
—	+ 20	—	= 34,8 —	
				3,5 —
—	+ 30	—	= 38,3 —	
				3,2 —
—	+ 40	—	= 41,5 —	
				2,0 —
—	+ 50	—	= 43,5 —	
				1,2 —
—	+ 55	—	= 44,7 —	
				0,6 —
—	+ 100	—	= 45,3 —	

Nous voyons, d'après ce tableau, que la contraction résultant de l'addition d'une première molécule d'eau à Na_2O est égale à zéro. Cependant, G.-A. Hagemann admet qu'au lieu d'être nulle, cette contraction est égale à $14^{cc},5$, et en voici la raison :

Hagemann tâche de nous démontrer que la contraction subie, par exemple, par $\frac{SO_4Na_2}{2}$ dans 50 molécules d'eau (71 grammes dans 900 grammes d'eau), est égale à la contraction subie par $\frac{Na_2O}{2}$, moins celle subie par $\frac{SO_3}{2}$. Or, la contraction subie par $\frac{SO_4Na_2}{2}$ est estimée par Hagemann être égale à 17,3, et pour toute la molécule de SO_4Na_2 cette contraction est à peu près le double ou $34^{cc},6$.

Mais par les deux tableaux précédents, SO_3 avec 50 molécules d'eau éprouve une contraction de 23,7, et Na_2O avec 50 molécules d'eau une contraction de 43,5. Or, la différence entre 43,5 et 23,7 n'est pas 34,6, mais seulement 19,8. Donc il faut ajouter 14,8 à 19,8 pour avoir une contraction de 34,6, et, en admettant

que Na_2O + 1 molécule d'eau éprouve une contraction de 14,8, nous voyons que 43,5 + 14,8 — 23,7 = 34,6.

Donc, la contraction éprouvée par Na_2O dans 50 molécules d'eau serait de 43,5 + 14,8 = 58,3, nombre que G.-A. Hagemann appelle « Contractions-Energiezahl » de Na_2O.

D'après l'estimation de Becketoff, la chaleur dégagée en dissolvant Na_2O dans 50 molécules d'eau est égale à 55500 calories pour une contraction de 43,5 + 14,5 = 58 c. c., soit environ $\frac{55500}{58} = 957$ calories par centimètre cube.

Thomsen a trouvé 9940 calories en dissolvant $Na_2O + H_2O$ (monohydraté), soit 19880 calories pour la molécule double, ou $\frac{19880}{43,5} = 457$ calories par centimètre cube.

La chaleur dégagée en dissolvant Na_2O dans $1H_2O$ serait donc, d'après cela, égale à 55500 — 19880 = 35620 calories, ce qui donnerait $\frac{35620}{14,5} = 2460$ calories par centimètre cube.

Le tableau pour l'oxyde de potassium nous donne :

K_2O anhydre	+	1 molécule d'eau	=	0,0 c. c.
—	+	4 —	=	13,0 —
—	+	5 —	=	16,0 —
—	+	6 —	=	17,8 —
—	+	7 —	=	19,5 —
—	+	8 —	=	20,5 —
—	+	9 —	=	21,9 —
—	+	10 —	=	23,0 —
—	+	20 —	=	24,9 —
—	+	50 —	=	26,1 —
—	+	100 —	=	26,0 —

Pour trouver l'énergie de contraction « Contractionszahlen » de H_2O, nous pouvons employer le sulfate de potassium SO^4K^2; nous voyons, comme pour Na_2O, que cette énergie n'est pas exprimée ici par 26,1, puisque nous avons trouvé zéro pour la première molécule d'eau.

En opérant pour le potassium comme pour le sodium, nous aurons ce qui suit :

$\frac{SO^4K^2}{2}$	87 gr., volume $\frac{87}{2,64}$ =	32,9 c. c.
50 molécules d'eau	900 —	900,0 —
$\frac{SO^4K^2}{2} + 50H_2O$ . .	987 gr.	932,9 c. c.

Or, la densité de $\frac{SO^4K^2}{2} + 50\ H^2O$ est égale à 1,07336.

Donc, le volume réel de $\frac{SO^4K^2}{2} + 50\ H^2O$ sera $\frac{987}{1,07336} = 919,6$ c. c. au lieu de 932,9 c. c.; il y a ainsi une contraction de 13.3 c. c. en dissolvant $\frac{SO^4K^2}{2}$ (ou 87 grammes de sulfate) dans 50 molécules de H_2O (ou 900 grammes d'eau).

La contraction pour une molécule entière SO^4K^2 sera donc $13,3 \times 2 = 26,6$ c. c.

Or, la contraction de SO_3 dans 50 molécules d'eau a été trouvée égale à 23,6, et celle de K_2O dans 50 H_2O est 26,1 c. c., si l'on supposait que $K_2O + 1H_2O$ ne subit pas de contraction. La différence est seulement 2,5 au lieu de 26,6 c. c.; on devra donc supposer que $K_2O + 1H_2O$ subit une contraction de $26,6 - 2,5 = 24,1$ c. c. et par suite l'énergie de contraction de K_2O, pour 50 molécules d'eau, sera $26,1 + 24,1 = 50,2$ ou 50 en chiffres ronds.

En continuant de la même manière, nous trouvons que l'énergie de contraction de MgO est 64, de $Na_2O = 58$, de $K_2O = 50$, de l'ammoniaque = 37, de $CaO = 48$, de $SrO = 42$, de $BrO = 36$, de $SO_3 = 24$, de $N_2O_5 = 34$, de $CO_2 = 6$.

Voici quelques vérifications de ces nombres données par G.-A. Hagemann :

L'azotate de sodium NaO_3N a pour densité 2,227; son poids moléculaire est 85 et son volume moléculaire est 38,1; nous obtenons ainsi :

NO_3Na	85 grammes, volume $\frac{85}{2,227}$ =	38,1 c. c.
50 molécules d'eau.	900 —	900,0 —
	985 grammes	938,1 c. c.

Donc, en dissolvant 85 grammes de NO_3Na dans 900 grammes d'eau, nous obtiendrions pour volume de la solution 938,1 c. c. s'il n'y avait pas de contraction. Or 985 grammes de solution contiennent 85 grammes de NO_3Na, c'est-à-dire 8,65 °/₀, et la densité de la solution est pour 8,65 °/₀ égale à 1,0556; par conséquent, le volume réel de la solution est 985 : 1,0556 = 933 c. c. Il existe donc une contraction de 938,1 — 933 = 5,1 c. c., et comme moyenne de plusieurs observations, Hagemann trouve une contraction de 5,07 c. c. Or, les nombres exprimant l'énergie de contraction de Na_2O et de N_2O_5 sont respectivement 58 et 34, soit 29 et 17 pour la moitié, puisque NO_3Na est seulement la moitié de $Na_2O + N_2O_5 = 2NO_3Na$; nous aurons donc

$$2 \times 17 - 29 = 5,$$

ce qui est à peu de chose près la contraction subie par la dissolution de NO_3Na dans 900 grammes d'eau. La chaleur de dissolution de NO_3Na est, d'après Thomsen, égale à — 5030 calories, tandis que Favre et Valson ont trouvé — 4842 calories en dissolvant 85 grammes de nitrate de sodium dans 1 litre d'eau.

De même, pour le nitrate de potassium nous aurons, d'après Hagemann, en dissolvant 101 grammes de NO_3K dans 900 grammes d'eau,

NO_3K	101 grammes, volume $\frac{101}{2,105}$	= 47,98 c. c.
50 molécules d'eau .	900 —	900,00 —
	100 grammes	947,98 c. c.

La solution contient ainsi 101 : 1001 = 10,1 °/₀ de NO_3K, dont la densité est 1,0659; le volume de la dissolution sera 1001 : 1.0659 = 939,1; et la contraction sera de 8,38 c. c. Comme moyenne de trois observations, Hagemann trouve 8,98 c. c. pour la contraction.

L'énergie de contraction de K_2O et NO_5 étant respectivement 50 et 34, ou 25 et 17 pour la moitié, nous aurons comme pour l'azotate de sodium

$$2 \times 17 - 25 = 9,$$

ce qui est très voisin de 8,98 c. c., contraction subie par la dissolution de 101 grammes de NO_3K dans 900 grammes d'eau. La chaleur de dissolution, d'après Thomsen, est — 8520 calories.

Quant aux azotates de calcium, strontium et baryum, Hagemann emploie les contractions trouvées par Favre et Valson, qui sont

$$\left.\begin{aligned} \frac{N_2O_6Ca}{2} &= 9,7 \text{ c. c.} \\ \frac{N_2O_6Sr}{2} &= 12,7 \text{ —} \\ \frac{N_2O_6Ba}{2} &= 16,2 \text{ —} \end{aligned}\right\} \text{ dans un litre d'eau.}$$

Pour la molécule-gramme entière, nous aurons donc une contraction respectivement de 19,4, 25,4 et 32,4 c. c., et Hagemann en déduit successivement les énergies de contraction de CaO, SrO et BaO qui seront donc (l'énergie de contraction de N_2O_5 étant 34)

$2 \times 34 - 19,4 = 48,6$ ou, en chiffres ronds, 48 pour CaO.
$2 \times 34 - 25,4 = 42,6$ — 42 pour SrO.
$2 \times 34 - 32,4 = 35,6$ — 36 pour BaO.

Pour les chlorures, la loi trouvée ci-dessus n'a pas lieu; la contraction subie par les chlorures n'est plus la différence entre les contractions des parties composantes, comme pour les sulfates et les azotates.

Chlorure de sodium ClNa.

Le chlorure de sodium a le poids moléculaire 58,5 ou 117 pour poids moléculaire double; son poids spécifique est 2,15 et le volume moléculaire $117 : 2,15 = 54,4$ c. c. En dissolvant 117 grammes de NaCl dans $18 \times 6,5 = 117$ grammes d'eau (6,5 molécules d'eau), Hagemann obtient une contraction de 14,4 c. c.; pour 50 molécules d'eau ou 900 grammes, la contraction est 17,5 c. c. Thomsen obtient une contraction d'environ 18,5 c. c. en dissolvant 117 grammes de NaCl dans 900 grammes

d'eau et une diminution de volume de 20 c. c. dans 1800 grammes d'eau.

Chlorure de potassium KCl.

Voici les résultats obtenus en dissolvant une double molécule-gramme de sel dans 50 molécules d'eau. Le poids de la molécule-gramme double est 148,8 grammes; la densité de KCl étant 1,945, le volume du sel employé sera 148,8 : 1,945 = 74,7 c. c. Hagemann et Favre et Valson ont trouvé une contraction de 17,6 c. c., et Gerlach, de 19 c. c. environ.

Chlorure d'ammonium $ClNH_4$.

Le chlorure d'ammonium ne se comporte pas de la même manière que les deux chlorures précédents.

Le poids spécifique est 1,52; la double molécule-gramme pèse 107 grammes et le volume spécifique, $\frac{107}{1,52} = 70,4$.

D'après Gorlach, 1 litre d'une solution de chlorure d'ammonium de densité 1,0167 contient 5,30 % de $ClNH_4$; donc

1 litre	1016,7	grammes
contenant en NH_4Cl	53,88	—
reste	962,82	grammes d'eau
Volume de NH_4Cl	35,4	
	998,22	
Dilatation	1,8	c. c.

Ainsi, en dissolvant 53,88 grammes de NH_4Cl dans 962,82 grammes d'eau, on obtient une dilatation de 1,8 c. c. au lieu d'une contraction.

Chlorures alcalino-terreux.

Hagemann trouve une contraction de 13,6 c. c. en dissolvant 55,5 grammes de $CaCl^2$ dans 900 grammes d'eau. En dissol-

vant dans 900 grammes d'eau la molécule-gramme de Cl^2Ca (c'est-à-dire 111 grammes de Cl^2Ca de densité 2,24), Gerlach trouve une contraction de 27,33 c. c. Pour 100 molécules d'eau ou 1,800 grammes, les 111 grammes de Cl^2Ca donnent une contraction de 35,2 c. c.

Deux molécules-grammes de $BaCl^2$ ou 416 grammes ayant un volume de 108,6, donnent avec 100 molécules d'eau une contraction estimée par Hagemann à 52 c. c., tandis que la molécule double de $SrCl^2$ avec la même quantité d'eau donne une contraction égale à 30 c. c.

Sulfate de magnésium $MgSO_4$.

Le poids moléculaire de ce sel est 120 et la densité 2,617; le volume moléculaire est donc 45,9. En dissolvant 120 grammes dans 994,05 grammes d'eau, Hagemann obtient une contraction de 40 c. c.; en ajoutant le nombre exprimant l'énergie de contraction de SO_3, c'est-à-dire 24, on trouve pour énergie de contraction de MgO : 40 + 24 = 64.

Carbonate de sodium CO_3Na_2.

Le poids moléculaire est 106, la densité 2,521, le volume moléculaire 42 c. c.

Voici les résultats obtenus :

CO_3Na_2 (106 gr.)	+ 7 H_2O	donnent une contraction de	14,3 c. c.
—	+ 10 H_2O	—	24,1 —
—	+ 50 H_2O	—	37,1 —
—	+ 100 H_2O	—	41,4 —
—	+ 200 H_2O	—	44,1 —

En comparant ce tableau avec le tableau relatif à Na_2O, nous voyons que la contraction subie par Na_2O avec 10 molécules

d'eau est précisément égale à la contractioné prouvée par CO_3Na_2 avec 10 molécules d'eau. Pour les autres quantités d'eau, les contractions éprouvées par CO_3Na_2 et Na_2O sont différentes; ainsi, pour 50 molécules d'eau, la différence est 6, nombre que Hagemann prend pour exprimer l'énergie de contraction de CO_2.

Pour des quantités d'eau très considérables, Hagemann dit que les contractions subies par Na_2O_3C et Na_2O paraissent devenir de nouveau égales.

Carbonate de potassium CO_3K_2.

Le poids moléculaire est 138,2, la densité 2,265 et le volume moléculaire 61.

Voici les résultats obtenus :

CO_3K_2 (138gr,2)	+	7 H_2O donnent	19.2 c. c.	de contraction.
—	+	8 H_2O —	20.7	—
—	+	9 H_2O —	22	—
—	+	10 H_2O —	23.2	—
—	+	20 H_2O —	30.6	—
—	+	50 H_2O —	38.5	—
—	+	100 H_2O —	42.4	—
—	+	200 H_2O —	45	—

En comparant au tableau obtenu pour K_2O, nous voyons que les contractions éprouvées par CO_3K_2 et K_2O sont les mêmes pour 7 à 10 molécules d'eau; au delà, les contractions de CO_3C_2 croissent bien plus rapidement pour CO_3K_2 que pour K_2O.

Pour 50 molécules d'eau, par exemple, la différence des diminutions de volume est 38,5 — 26,1 = 12,4.

Hagemann nous donne aussi un tableau établi par Thom-

sen, indiquant les chaleurs dégagées par la dissolution de différents sels dans l'eau.

	Na_2.	K_2.	Mg.	Ca.	Sr.	Ba.
Cl_2	- 2360	- 8880	35920	17410	11140	2070
SO_4.	460	- 6380	20280	4440	0	- 5580
N_2O_5	- 10060	- 17040	—	3950	- 4620	- 9400
CO_3.	5640	6490	—	—	—	—

Ce tableau a été construit comme une table de multiplication; la chaleur dégagée, par exemple, par K_2Cl_2 ou 2KCl dans 900 grammes d'eau est donnée par le nombre indiqué à l'intersection de la ligne horizontale contenant Cl_2 et de la colonne contenant K_2; donc ici — 8,880 calories ou pour la molécule simple $-\frac{8880}{2} = 4440$ calories.

Nous observerons encore que les nombres de ce tableau diffèrent très peu des nombres donnés dans l'avant-dernière colonne du tableau de Favre et Valson; de plus, cette différence peut provenir de ce que Favre et Valson dissolvent la molécule-gramme de sels dans 1 litre d'eau, tandis que Thomsen donne les nombres exprimant la chaleur développée par la molécule-gramme dans 900 grammes d'eau.

Pour terminer, voici les conclusions que G.-A. Hagemann tire de son travail :

1° Les solutions aqueuses des corps sont des combinaisons chimiques dont les caractères physiques sont la contraction moléculaire et le développement de chaleur.

2° Les énergies de contraction « Contractions-Energiezahlen » sont : pour MgO, 64; Na_2O, 58; K_2O, 50; ammoniaque, 37; CaO, 48; SrO, 42; BaO, 36; SO_3, 24; N_2O_5, 34; CO_2, 6.

3° La contraction moléculaire des solutions est la différence entre les contractions moléculaires des parties composantes; ou

bien (au lieu de la différence directe), il existe une relation simple entre la contraction du sel et les contractions moléculaires des parties composantes.

Cette loi n'est plus vraie pour les chlorures, bromures et iodures.

M. A. Heritsch s'est occupé aussi des dissolutions des sels; son mémoire a été publié aux *Annalen der Physick von Wiedemann*, 1890, Bd XXXVI.

En employant 100 grammes d'une solution, désignons avec M. Heritsch par δ le changement de volume subi par ces 100 grammes, et par p la contenance pour cent en sel de ces 100 grammes; la valeur de δ sera donnée par l'expression

$$\delta = c(100 - p)p,$$

où c est une constante variant d'un sel à un autre. On suppose d'ailleurs que la température reste la même.

En remplaçant δ par y et p par x, nous aurons

$$y = c(100 - x)x,$$

équation d'une parabole passant par l'origine des coordonnées, sans que toutefois cette origine se trouve au sommet de la parabole. Heritsch fait aussi remarquer que δ a une valeur maximum pour $p = 50$.

Comme autre formule donnant la contraction subie par la solution des sels, Heritsch donne

$$\frac{100 - p}{\sigma} + \frac{p}{d} - \frac{100}{s} = \delta;$$

σ désigne la densité de l'eau, d le poids spécifique du sel dissous et s le poids spécifique de la dissolution, ces trois quantités étant déterminées pour la même température.

Heritsch remplace ensuite l'expression

$$\delta = c(100 - p)p$$

par la suivante :

$$\delta = c(100)^2 \frac{m \cdot m_1}{(m + m_1)^2}$$

m et m_1 étant les poids de l'eau et du sel employés dans 100 grammes de solution.

En effet,

$$p = \frac{100\,m_1}{m + m_1}, \quad 100 - p = \frac{100\,m}{m + m_1},$$

d'où

$$\delta = c(100 - p)p = \frac{c(100)^2 m \cdot m_1}{(m + m_1)^2}.$$

Toutes ces expressions, comme nous l'avons dit déjà, expriment le changement de volume subi par 100 grammes d'une solution; pour une solution quelconque dont le poids du sel employé est m_1 et la quantité d'eau m, la contraction sera donnée par l'expression précédente multipliée par $\frac{m + m_1}{100}$; nous aurons donc :

$$\delta_1 = c100 \cdot \frac{m \cdot m_1}{m + m_1} = \frac{Am \cdot m_1}{m + m_1},$$

$A = 100\,C$ variant d'un sel à un autre et restant constant pour un même sel.

Il nous suffira, croyons-nous, de signaler un mémoire de Mac Gregor, publié dans les *Transac. roy. Soc. of Canada*, 3, 19, 1890.

Ce travail de Mac Gregor se rapporte spécialement aux sulfates et ne signale aucun fait qui ne nous soit connu.

Nouvelles déterminations des changements de volume dans les dissolutions des sels.

Description de l'appareil employé.

Toutes les expériences précédentes ont été déterminées au moyen du picnomètre.

L'appareil que nous avons employé au Laboratoire de l'Université de Liége est susceptible de donner des résultats plus satisfaisants; le changement de volume de la solution nous est donné par une simple lecture.

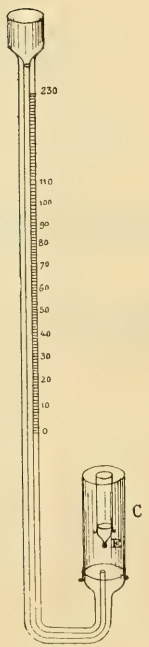


Fig. 1.

Cet instrument est dû à M. le professeur De Heen et en voici la description sommaire :

Il se compose d'un tube capillaire en forme de U, mais dont les deux branches sont de longueurs très inégales; le diamètre intérieur de ce tube est de 2 millimètres environ. La grande branche est graduée en millimètres sur la majeure partie de sa longueur, et l'extrémité supérieure est terminée par une cuvette permettant l'adaptation d'un bouchon, pour empêcher l'évaporation de l'eau pendant l'augmentation de la température.

La petite branche du tube permet l'adaptation d'un flacon renversé C. Au fond de C est soudé un second flacon plus petit, se fermant avec un bouchon en verre E usé à l'émeri.

Voici la manière de se servir de l'instrument : Après avoir introduit une quantité déterminée de sel dans le petit flacon, on complète le remplissage au moyen du pétrole, substance ne dissolvant pas les sels. Au moyen d'une

pompe pneumatique, on extrait l'air pouvant se trouver dans le pétrole et sur les parois du petit flacon. Cette opération terminée, nous fermons E au moyen du bouchon usé à l'émeri.

Dans C, on introduit une certaine quantité d'eau, de façon que le flacon soit rempli complètement, et on y adapte le tube.

La quantité d'eau renfermée dans C reste la même pendant le cours de toutes les expériences avec le même instrument.

Tout ceci fait, nous plongeons l'appareil dans un vase contenant de l'eau à 15°, et après que l'équilibre de température s'est établi, nous notons à quelle division s'arrête la colonne d'eau dans le tube capillaire gradué. Nous retirons l'instrument du vase et nous le plaçons dans un courant d'air chaud; le pétrole, en se dilatant, fait tomber le bouchon E du petit flacon, et le sel renfermé dans celui-ci vient en contact avec l'eau de c et se dissout. Ramenons ensuite notre système à la température initiale 15°, et lorsque l'équilibre de température est de nouveau rétabli, nous notons la division du tube capillaire à laquelle s'arrête la colonne d'eau; la différence entre la hauteur initiale et la hauteur finale nous donnera la contraction correspondante à la quantité de sel employée. Le volume d'une division du tube capillaire est du reste déterminé.

Nous signalerons que toutes les observations indiquées dans la suite, ont été déterminées à la température de 15° centigrade.

Reprenons l'équation de Heritsch indiquée plus haut

$$\delta = c(100 - p)p;$$

elle représente une parabole en prenant les p (proportion °/₀) pour axe des abscisses et δ pour axe des coordonnées.

Le maximum de cette expression se produisant pour $p = 50$ °/₀, la valeur de δ sera la même pour deux valeurs également distantes de 50.

La valeur de δ (diminution de volume) est nulle pour $p = 0$, ce qui est évident puisque alors la solution ne contient pas de sel; elle est nulle aussi pour $p = 100$, car alors il n'y a pas d'eau

pour dissoudre le sel. Entre ces deux valeurs, la contraction δ augmente d'abord et elle diminue à partir de $p = 50$.

La nature de $\delta = c(100 - p)p$ est précisément la même que la trajectoire décrite par le mouvement des projectiles dans le vide.

Considérons maintenant 100 grammes d'une autre dissolution du même sel, et soient δ_1 et p_1 respectivement la contraction et la quantité °/₀ de cette solution; nous aurons

$$\frac{\delta}{\delta_1} = \frac{c(100 - p)p}{c(100 - p_1)p_1} = \frac{(100 - p)p}{(100 - p_1)p_1}.$$

Supposons maintenant 100 grammes de deux sels différents; soient δ et δ_1 les contractions subies par ces sels, soit p la quantité °/₀ que nous prendrons la même pour les deux solutions, et soient c et c', les deux constantes correspondantes; nous aurons

$$\frac{\delta}{\delta_1} = \frac{c}{c_1} \cdot \frac{(100 - p)p}{(100 - p)p} = \frac{c}{c_1} = \text{constante}.$$

L'expression

$$\delta' = A \frac{mm_1}{m + m_1},$$

d'après Heritsch, donne la contraction, non plus de 100 grammes comme la première formule, mais d'une solution dont m et m_1 représentent les poids de l'eau et du sel employé, A étant une constante pour un même sel, mais variant d'un sel à un autre.

Supposons que m (quantité d'eau de l'appareil) reste constant, comme c'est le cas dans les observations que nous avons faites, et remplaçons m_1 par sa valeur en fonction de p; nous savons que l'on a :

$$p = \frac{100\, m_1}{m + m_1} \text{ d'où } m_1 = \frac{pm}{100 - p}.$$

Donc l'équation en δ' deviendra

$$\delta' = \frac{Am \times pm}{100 - p} : m + \frac{pm}{100 - p} = \frac{Amp}{100} = ap,$$

car

$$\frac{Am}{100} = \text{constante} = a.$$

Si nous prenons δ' comme ordonnée et p comme abscisse, nous aurons

$$y = ax,$$

ce qui représente une droite passant par l'origine. Donc, en dissolvant des quantités différentes d'un même sel dans des masses d'eau égales, le rapport des contractions subies doit être égal au rapport des quantités % de sel employé.

Nous allons examiner chaque sel en particulier.

Chlorure de sodium NaCl. — Densité 2.23.

Voici les différentes valeurs obtenues pour ce sel :

POIDS DU SEL.	V	v	$\frac{v}{V}$	p	δ
1gr,117	0cc,500	0,1838	0,367	8,5	1,40
0,701	0,314	0,12016	0,382	5,52	0,943
0,625	0,280	0,1083	0,388	4,95	0,86
0,610	0,2735	0,10675	0,3903	4,84	0,845
0,450	0,2018	0,0815	0,4038	3,61	0,6525
0,430	0,1928	0,0785	0,407	3,46	0,63
0,125	0,0561	0,02472	0,440	1,03	0,22

La seconde colonne donne le volume des quantités employées; v désigne le changement de volume par suite de la dissolution de V dans 12 c. c. d'eau; p est la quantité % du sel contenu dans la dissolution; δ représente le changement de volume subi par 100 grammes de la solution.

D'après les valeurs données dans la colonne $\left[\frac{v}{V}\right]$, ce rapport augmente à mesure que la quantité de sel dissous diminue. Ceci tend à faire admettre que plus vite la dissolution du sel s'est accomplie, plus grande est la quantité proportionnelle d'énergie développée.

Nous observons que les différentes valeurs de v sont entre elles comme les valeurs correspondantes de p.

En effet, nous avons comme vérification :

$$8{,}5 : 5{,}52 = 1{,}54 \quad \text{et} \quad 0{,}1838 : 0{,}1201 = 1{,}531$$
$$5{,}52 : 4{,}95 = 1{,}11 \quad \text{et} \quad 0{,}1202 : 0{,}1083 = 1{,}11$$
$$4{,}84 : 3{,}61 = 1{,}34 \quad \text{et} \quad 0{,}10675 : 0{,}0815 = 1{,}31;$$

ces rapports sont sensiblement égaux.

Donc, si nous construisons un diagramme en prenant les valeurs de $p \times 10$ comme abscisse et $v \times 100$ comme ordonnée, p et v étant exprimés en millimètres de longueur, nous obtiendrons une droite.

Voyons maintenant si les valeurs de p et δ vérifient la relation

$$\delta = c(100 - p)p.$$

Nous prenons encore pour construire le diagramme 10 p comme abscisse et 100 δ comme ordonnée, en prenant, par exemple, le millimètre comme unité de longueur.

Pour trouver c, prenons par exemple une abscisse de 50 millimètres; l'ordonnée sera donnée sur le diagramme comme ayant une valeur de 87 millimètres.

Donc nous prendrons $p = 5$ et $\delta = 0{,}87$, d'où

$$0{,}87 = c(100 - 5)5 = 475c,$$

c'est-à-dire

$$c = 0{,}00183 \text{ pour NaCl.}$$

Faisons quelques vérifications :

$p = 8{,}5$, δ calculé $= 1{,}415$, δ trouvé $= 1{,}41$
$p = 5{,}52$, — $= 0{,}954$, — $= 0{,}944$
$p = 3{,}61$, — $= 0{,}637$, — $= 0{,}652$.

Les valeurs de δ calculées et de δ trouvées diffèrent entre elles tout au plus de $1^{mm},5$. Ce résultat peut par conséquent être regardé comme satisfaisant et la courbe décrite dans ce cas sera donc une portion de parabole.

La valeur de δ s'obtient facilement au moyen de celle de v. En effet, pour la première expérience nous aurons par exemple : 12 + $1^{gr},117$ de solution donnent une contraction égale à

$0^{cc},1838$, d'où 100 grammes de la même solution donneraient une contraction de $\frac{0,1838 \times 100}{12 \times 1,117} = 1,41$, et ainsi de suite pour les autres δ.

Chlorure de potassium. — Densité 1,98.

P	V	v	$\frac{v}{V}$	p	δ
—	—	—	—	—	—
$1^{gr},146$	$0^{cc},5788$	0,1512	0,261	8,72 %	1,15
0,812	0,410	0,1127	0,2748	6,34	0,88
0,671	0,339	0,09487	0,2798	5,3	0,748
0,586	0,296	0,0835	0,2855	4,65	0,663
0,390	0,1969	0,0593	0,2991	3,15	0,478
0,215	0,1086	0,0341	0,3141	1,76	0,278
0,954	0,481	0,1275	0,2651	7,36	0,984

D'après ce tableau, le chlorure de potassium suit la même loi que le chlorure de sodium, mais les contractions sont proportionnellement plus faibles.

Si nous construisons un diagramme comme pour le sel précédent, nous voyons que les p sont proportionnels aux nombres de la colonne v.

Quant au paramètre c, nous trouvons qu'en prenant l'ordonnée 71 qui correspond à l'abscisse 50, nous avons

$$0,71 = c(100 - 5)5 = 475c,$$

d'où

$$c = 0,00150 \text{ pour KCL.}$$

Voici quelques vérifications :

$p = 5,3$, δ calculé $= 0,752$, δ trouvé $= 0,748$
$p = 3,15$, — $= 0,458$, — $= 0,478$
$p = 6,34$ — $= 0,89$, — $= 0,88$.

Ainsi δ calculé diffère peu de δ trouvé, et la courbe décrite sera une parabole comme dans le cas précédent.

Prenons maintenant 100 grammes d'une solution de NaCl et

100 grammes d'une solution de KCl, ces deux solutions renfermant la même quantité de sel; nous aurons alors, si p désigne la quantité pour cent de sel des deux solutions et δ_1, δ_2 les contractions respectivement pour 100 grammes de NaCl et KCl,

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{0{,}00183(100-p)p}{0{,}00150(100-p)p} = \frac{183}{150} = 1{,}22.$$

Chlorure d'ammonium. — Densité 1,559.

P	V	v	$\frac{v}{V}$	p	δ
—	—	—	—	—	—
1gr,103	0cc,7075	−0,0429	−0,0606	6,85 %	−0,266
0,768	0,4926	−0,0274	−0,0556	4,87	−0,173
0,695	0,4458	−0,024	−0,0538	4,43	−0,153
0,535	0,3432	−0,0132	−0,0384	3,44	−0,085
0,462	0,2963	−0,011	−0,0371	2,98	−0,071
0,287	0,1841	−0,0066	−0,03585	1,87	−0,043

Nous voyons par ce qui précède que le chlorure d'ammonium ne se comporte pas comme les deux sels précédents. Le changement de volume, au lieu d'être une contraction, est, au contraire, une dilatation; c'est ce que nous avons exprimé en mettant le signe — devant les différentes valeurs de v.

Quant au rapport $\frac{v}{V}$, il augmente à mesure que la quantité de sel dissous augmente, ce qui est l'inverse de ce qui a lieu pour la plupart des sels.

Le coefficient c est négatif; si nous prenons le $\delta = 26{,}6$ qui correspond à $p = 6{,}85$, nous aurons :

$$-0{,}266 = c \times 93{,}15 \times 6{,}85,$$

d'où

$$c = -0{,}00042 \text{ pour } NH^4Cl.$$

La courbe décrite est encore une parabole, mais cette courbe se trouve dans l'angle compris entre les δ négatifs et les p positifs.

Cette parabole tourne sa convexité du côté de l'axe des p à l'encontre de ce qui a lieu pour les autres sels.

Chlorure de césium.

1gr,148	»	0,0229	»	8,73 %	0,174
0,586	»	0,0122	»	4,65	0,962
0,350	»	0,00735	»	2,83	0,063
0,216	»	0,004635	»	1,76	0,037

Ces valeurs vérifient les deux relations de Heritsch.

Le coefficient c est positif, mais très petit; nous avons

$$0{,}174 = c \times 91{,}27 \times 8{,}73,$$

d'où

$$c = +0{,}00022 \text{ pour CeCl.}$$

Les quatre sels précédents font partie de la série des chlorures alcalins. Ils ont été fondus au creuset, excepté le chlorure d'ammonium, qui se dissocie en chauffant.

Chlorure de magnésium. — Densité 2,177.

P	V	v	$\frac{v}{V}$	p	δ
—	—	—	—	—	—
1gr,253	0cc,5755	0,1672	0,2906	7,71 %	1,03
0,635	0,2916	0,0887	0,3042	4,06	0,567
0,609	0,2798	0,0854	0,3053	3,9	0,546
0,309	0,142	0,0451	0,3176	2,02	0,296
0,211	0,097	0,0317	0,3271	1,38	0,208

Les nombres de la colonne p sont comme précédemment proportionnels aux nombres correspondants de la colonne v.

Cherchons la valeur de c dans la formule

$$\delta = c(100 - p)p;$$

nous avons

$$1{,}03 = c \times 92{,}29 \times 7{,}71 \quad \text{d'où} \quad c = 0{,}00144 \text{ pour } MgCl^2.$$

Chlorure de cadmium. — Densité 3,78.

P	V	v	$\frac{v}{V}$	p	δ
—	—	—	—	—	—
1gr,528	0cc,4042	0,1584	0,3918	9,24 %	0,958
0,701	0,1854	0,0748	0,4030	4,47	0,476
0,328	0,0868	0,0429	0,494	2,14	0,28

Ces nombres vérifient la relation $v = ap$.

Quant à l'équation $\delta = c\,(100 - p)\,p$, elle nous donne

$$0{,}958 = c \times 9{,}24 \times 90{,}76,$$

d'où

$$c = 0{,}00114 \text{ pour } CdCl^2.$$

Si nous prenons deux solutions, l'une de $MgCl^2$, l'autre de $CdCl^2$, renfermant toutes les deux la même quantité pour cent de sel, nous aurons comme rapport

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{0{,}00144}{0{,}00114} = 1{,}26.$$

Nous ferons observer que le chlorure de sodium, le chlorure de potassium et le chlorure de césium ont été dissous dans 12 centimètres cubes d'eau, tandis que pour les trois autres sels précédents, la quantité d'eau employée est de 15 centimètres cubes.

Les deux derniers sels, tels que nous les avons employés, sont complètement anhydres, car ils ont été fondus au creuset.

Chlorure de baryum. — Densité 3,85.

1gr,306	0cc,339	0,1676	0,494	9,81 %	1,26
0,937	0.2435	0,1231	0,5058	7,24	0,952
0,565	0,1467	0,0798	0,544	4,5	0,635
0,362	0,0953	0,0524	0,550	2,93	0,424

Nous avons comme vérification :

$$9{,}81 : 7{,}24 = 1{,}35, \qquad 0{,}1676 : 0{,}1231 = 1{,}36$$
$$7{,}24 : 4{,}5 = 1{,}60, \qquad 0{,}1231 : 0{,}0798 = 1{,}54.$$

Le coefficient c de l'équation $\delta = c\,(100 - p)\,p$ sera ici :

$$0{,}7 = c(100 - 5) \times 5 = 475c,$$

d'où

$$c = 0{,}00145 \text{ pour } BaCl^2.$$

Chlorure de calcium. — Densité 2,216.

P	V	v	$\frac{v}{V}$	p	δ
1gr,211	0cc,5466	0,312	0,571	9,16 °/o	2,365
1,193	0,538	0,308	0,5722	9,04	2,335
0,545	0,246	0,144	0,585	4,34	1,147
0,320	0,144	0,091	0,631	2,6	0,74
0,245	0,1105	0,0729	0,660	2	0,596

En faisant les mêmes calculs que précédemment, nous obtenons des vérifications analogues.

Le coefficient c sera donné par

$$1{,}265 = c(100 - 5)5 = 475c$$

d'où

$$c = 0{,}00266 \text{ pour } CaCl^2.$$

Chlorure de strontium. — Densité 3,054.

P	V	v	$\frac{v}{V}$	p	δ
1gr,657	0cc,542	0,2804	0,518	12,14 °/o	2,057
0,920	0,3012	0,1733	0,575	7,12	1,341
0,735	0,2406	0,1414	0,587	5,77	1,110
0,463	0,1516	0,0912	0,601	3,71	0,733

Si nous prenons l'ordonnée 92 qui correspond à l'abscisse 0,5, nous aurons

$$0{,}92 = c(100 - 5) \times 5 = 475c,$$

d'où

$$c = 0{,}00192 \text{ pour } SrCl^2.$$

Les trois derniers sels étudiés font partie de la série des alcalino-terreux; la quantité d'eau dans laquelle ils ont été dissous est égale à 12 c. c. Avant d'être employés, ces sels ont été fondus au creuset, pour être rendus anhydres.

Chlorure de cuivre hydraté. — Densité 3,054.

P	V	v	$\frac{v}{V}$	p	δ
—	—	—	—	—	—
1gr,468	0cc,481	0,14934	0,310	10,9 %	1,109
0,916	0,300	0,1026	0,342	7,09	0,794
0,595	0,195	0,0673	0,3454	4,72	0,542
0,288	0,094	0,0342	0,363	2,34	0,278

Ce sel ne peut pas se fondre au creuset, vu qu'il se décompose par la chaleur.

Le coefficient c de la formule $\delta = c\,(100 - p)\,p$ sera donné (si 58 est la valeur de δ qui correspond à l'abscisse 50) par

$$0{,}58 = c(100 - 5) \times 5 = 475c,$$

d'où

$$c = 0{,}00122 \text{ pour } CuCl^2.$$

Chlorure de zinc. — Densité 2,753.

P	V	v	$\frac{v}{V}$	p	δ
—	—	—	—	—	—
1gr,273	0cc,462	0,264	0,570	9,59 %	2,00
0,852	0,309	0,189	0,611	6,63	1,47
0,530	0,1925	0,126	0,655	4,227	1,007
0,287	0,093	0,068	0,729	2,33	0,553

Les valeurs de la colonne v sont directement proportionnelles à celles de la colonne p.

Si nous prenons une abscisse égale à 50, le δ correspondant sur le diagramme construit pour $ZnCl^2$, est égal à 116 :

$$1{,}16 = c(100 - 5)5 = 475c, \quad \text{d'où} \quad c = 0{,}00244 \text{ pour } ZnCl^2.$$

Le chlorure de zinc que nous employons pour ces observations a été fondu pour être rendu anhydre.

La dissolution de ces deux derniers sels s'est faite dans 12 c. c. d'eau

Avec le chlorure de zinc nous terminons la série des chlorures.

Bromure de sodium. — Densité 3,2.

P	V	v	$\frac{v}{V}$	p	δ
1gr,385	0cc,433	0,120	0,275	8,45 °/₀	0,728
0,871	0,272	0,0806	0,296	5,49	0,508
0,598	0,186	0,057	0,305	3,74	0,364
1,095	0,342	0,099	0,2905	6,80	0,617

Les nombres de la colonne p exprimant la quantité pour cent sont proportionnels aux nombres de la colonne v exprimant les changements de volume.

L'ordonnée 47 correspond sur le diagramme à l'abscisse 50; nous aurons par là

$$0{,}47 = 475c, \quad \text{d'où} \quad c = 0{,}001 \text{ pour } BrNa.$$

Bromure de potassium. — Densité 2,524.

P	V	v	$\frac{v}{V}$	p	δ
1gr,355	0cc,537	0,105	0,195	8,28 °/₀	0,642
1,120	0,443	0,088	0,199	6,95	0,547
0,799	0,316	0,064	0,202	5,06	0,404
0,543	0,215	0,045	0,209	3,49	0,29

Le nombre 40 représente l'ordonnée correspondant à l'abscisse 50; nous aurons pour valeur de c :

$$0{,}40 = 475c,$$

d'où

$$c = 0{,}00084 \text{ pour KBr.}$$

La quantité d'eau employée pour dissoudre ces deux sels était égale à 15 c. c.

Carbonate de sodium. — Densité 2,476.

P	V	v	$\frac{v}{V}$	p	δ
—	—	—	—	—	—
0gr,648	0cc,262	0,264	1,004	5,12 %	2,086
0,441	0,178	0,185	1,04	3,54	1,49
0,243	0,098	0,105	1,07	1,98	0,857

Le coefficient c nous est donné par l'expression :

$$2{,}086 = c \times 94{,}88 \times 5{,}12$$
$$2{,}086 = 485{,}8c,$$

d'où

$$c = 0{,}0043 \text{ pour } Na^2Co^3.$$

Carbonate de potassium. — Densité 2,29.

P	V	v	$\frac{v}{V}$	p	δ
—	—	—	—	—	—
0gr,699	0cc,305	0,1924	0,630	5,51 %	1,515
0,527	0,230	0,146	0,633	4,21	1,16
0,395	0,1725	0,111	0,643	3,19	0,910

Pour avoir la valeur du coefficient c, prenons la première observation ci-dessus; nous avons

$$1{,}515 = c(100 - 5{,}51) \times 5{,}51 = 520{,}7c,$$

d'où

$$c = 0{,}0029 \text{ pour } K^2CO^3.$$

La dissolution de ces sels s'est faite dans 12 c. c. d'eau. Ces deux carbonates ainsi que les deux bromures précédents ont été fondus au creuset avant d'être employés. Nous observerons également que la contraction subie par ces deux carbonates est bien plus considérable proportionnellement, que le changement de volume éprouvé par les sels précédents en se dissolvant.

Azotate de calcium — Densité 2,504.

P	V	v	$\frac{v}{V}$	p	δ
1gr,017	0cc,4	0,1617	0,404	6,35 %	1,01
0,641	0,256	0,1044	0,408	4,1	0,667
0,326	0,13	0,055	0,425	2,13	0,3605

L'ordonnée 79,5 correspond à l'abscisse 50 sur le diagramme construit pour N^2O^6Ca; nous aurons de cette façon

$$0{,}795 = 475c,$$

d'où

$$c = 0{,}00168 \text{ pour } N^2O^6Ca.$$

Ce sel a été dissous dans 15 c. c. d'eau distillée.

Azotate de baryum. — Densité 3,208.

P	V	v	$\frac{v}{V}$	p	δ
0gr,701	0cc,2185	0,0803	0,371	4,46 %	0,517
0,397	0,1235	0,0491	0,397	2,51	0,319
0,284	0,0885	0,0368	0,416	1,86	0,257

A l'abscisse 50 correspond l'ordonnée 56,5; nous aurons au moyen de ces valeurs :

$$0{,}565 = 475c,$$

d'où

$$c = 0{,}00119 \text{ pour } N_2O_6Ba.$$

Azotate de strontium. — Densité 2.98.

P	V	v	$\frac{v}{V}$	p	δ
—	—	—	—	—	—
0gr,999	0cc,335	0,143	0,426	6,25 %	0,892
0,670	0,225	0,100	0,444	4,27	0,638
0,451	0,151	0,0691	0,457	3,8	0,447

Sur le diagramme construit avec les nombres ci-dessus, nous trouvons que l'ordonnée 72,5 correspond à l'abscisse 50; nous aurons de la sorte pour valeur de c

$$0{,}725 = 475c, \quad \text{d'où} \quad c = 0{,}00152 \text{ pour } N_2O_6Sr.$$

Ces deux derniers sels, comme le précédent, ont été dissous dans 15 c. c.

Iodure de sodium. — Densité 3,654.

P	V	v	$\frac{v}{V}$	p	δ
—	—	—	—	—	—
1gr,698	0cc,465	0,072	0,154	9,08 %	0,384
1,078	0,295	0,048	0,162	5,96	0,265
0,7308	0,200	0,035	0,175	4,12	0,197

En mesurant sur le diagramme, nous aurons pour valeur du coefficient c :

$$0{,}235 = 475c, \quad \text{d'où} \quad c = 0{,}000489 \text{ pour NaI.}$$

Iodure de potassium. — Densité 2,946.

P	V	v	$\frac{v}{V}$	p	δ
—	—	—	—	—	—
1gr,106	0cc,375	0,054	0,144	4,8 %	0,3
0,701	0,238	0,0445	0,187	3,96	0,251
0,435	0,147	0,0281	0,191	2,5	0,1425

Le nombre 31 exprime sur le diagramme l'ordonnée correspondant à $p = 5$ ou à l'abscisse 50 ; nous aurons donc

$$0{,}31 = 475c,$$

d'où

$$c = 0{,}00065 \text{ pour KI.}$$

Iodure de lithium.

P	V	v	$\frac{v}{V}$	p	δ
—	—	—	—	—	—
1gr,294	»	- 0,10464	»	7,07 %	- 0,572
0,932	»	- 0,077	»	5,2	- 0,43
0,525	»	- 0,0445	»	3	- 0,254

Nous voyons, par les valeurs ci-dessus, que l'iodure de lithium se comporte comme le chlorure d'ammonium ; il subit une dilatation au lieu d'une contraction par l'effet de la dissolution.

Comme valeur du coefficient c, nous avons

$$-0{,}254 = c(100 - 3) \times 3 = 291c,$$

d'où

$$c = -0{,}00087 \text{ pour LiI.}$$

Ces trois iodures ont été dissous dans 17 c. c. d'eau.

Pour terminer cette partie, nous dirons que le coefficient c pour N^2O^6Zn est 0,000589 et pour l'azotate de cuivre N^2O^6Cu, $c = 0{,}00084$.

OBSERVATIONS GÉNÉRALES.

Pour terminer, nous avons à signaler quelques remarques et les conclusions résultantes.

D'après Hagemann (voir plus haut), la contraction subie, par exemple, par KNO_3 en dissolvant une molécule-gramme de KNO^3 dans 900 grammes d'eau, est égale à $8^{cc},98$.

Or KNO_3 est le résultat de la combinaison de K_2O et de N_2O_5; les nombres exprimant l'énergie de contraction de K_2O et N_2O_5 dans 900 grammes d'eau sont respectivement 50 et 34, et nous avons $34 - \frac{50}{2} = 9$.

Ce nombre 9 est sensiblement égal à 8,98, exprimant la contraction de 101 grammes de KNO_3 dans 18 molécules d'eau.

Suivant Hagemann, cette manière d'opérer ne donne aucun résultat pour les chlorures.

Cependant nous croyons que cette manière de voir de G.-A. Hagemann n'est pas tout à fait exacte.

En effet, nous avons pour les chlorures :

$$Na_2O + 2HCl = 2NaCl + H_2O$$
$$K_2O + 2HCl = 2KCl + H_2O$$
$$H_3N + HCl = H_4NCl$$
$$CaO + 2HCl = CaCl^2 + H_2O$$
$$SrO + 2HCl = SrCl^2 + H_2O$$
$$BaO + 2HCl = BaCl^2 + H_2O$$

Nous voyons qu'il y a production d'une molécule d'eau pour tous les sels précédents, excepté pour le chlorure d'ammonium. La contraction du chlorure de sodium NaCl, en dissolvant deux molécules-grammes dans 50 molécules d'eau ou 900 grammes, est égale à 18 c. c. environ.

L'énergie de contraction de Na_2O avec 50 molécules d'eau a été trouvée égale à 58; celle de 2HCl est 20.

La contraction de Na_2O avec la première molécule d'eau est égale à 14,5. Par la combinaison de Na_2O et de 2HCl, il y a production d'une molécule d'eau; nous prendrons donc 58 — 14,5 = 43,5 au lieu du nombre 58. Retranchons 20, énergie de contraction de 2HCl, et divisons par 2 puisqu'il y a production de deux molécules de NaCl; nous aurons de la sorte

$$\frac{43,5 - 20}{2} = 11,75.$$

Supposons que l'énergie de contraction de 2HCl avec la première molécule d'eau soit prise égale à 9; comme celle de Na_2O avec la première molécule est 14,5, nous aurons pour contraction de NaCl avec la première molécule d'eau (molécule produite par l'effet de la combinaison de Na_2O avec 2HCl)

$$14,5 - 9 = 5,5.$$

Ce nombre 5,5, nous l'ajouterons à 11,75 pour avoir la contraction totale de NaCl, car 11,75 exprime la contraction subie par NaCl dans toutes les molécules d'eau, excepté la première, et pour celle-ci la contraction est égale à 5,5; nous aurons par là

$$11,75 + 5,5 = 17,25,$$

nombre très voisin de 17,5 qui exprime la contraction de 2NaCl dans 900 molécules d'eau.

Faisons de même pour le chlorure de potassium.

L'énergie de contraction de K_2O est égale à 50 pour la dissolution d'une molécule-gramme dans 900 grammes d'eau; en retranchant 24, contraction éprouvée par K_2O dans la première molécule d'eau, il reste

$$50 - 24 = 26, \quad \text{d'où} \quad \frac{26 - 20}{2} = 3.$$

Or, nous avons aussi comme contraction de K_2Cl_2 avec la première molécule d'eau :

$$24 - 9 = 15.$$

Donc la contraction totale nous donnera :

$$15 + 3 = 18,$$

nombre exprimant la contraction éprouvée par K_2Cl_2 dans 900 grammes d'eau. Ce nombre est à peu près 17,6, trouvé par Hagemann.

Pour le chlorure d'ammonium, l'action de HCl sur H_3N est double. En outre, ici, par la combinaison de H_3N avec HCl, il n'y a pas production de molécule d'eau comme précédemment.

Or, l'énergie de contraction de H_3N a été trouvée par Hagemann être égale à 37, et 2HCl a pour énergie de contraction 20; et, comme nous l'avons dit précédemment, l'action de HCl sur H_3N est double, nous obtenons

$$\frac{37}{2} - 20 = -1,5.$$

Ce nombre — 1,5 ne diffère pas sensiblement de — 1,8 indiqué par Hagemann, exprimant ainsi que le chlorure d'ammonium subit une dilatation de 1,8 en dissolvant une molécule de de H_4NCl dans 900 grammes d'eau.

Examinons encore le cas du chlorure de baryum; nous avons eu plus haut :

$$BaO + H_2Cl_2 = BaCl_2 + H_2O.$$

Une molécule de BaO dissoute dans une molécule de H_2O donne une contraction de 12 c. c., d'après Hagemann.

Nous voyons, d'après la formule ci-dessus, qu'il n'y a production que d'une seule molécule de $BaCl_2$; l'action de BaO sur H_2Cl_2 est donc double.

Or, l'énergie de contraction de BaO est, d'après Hagemann, égale à 36; nous aurons d'après cela

$$36 \times 2 - 12 \times 2 = 48.$$

L'énergie de contraction de 2HCl étant 20, nous aurons comme précédemment

$$\frac{48 - 20}{2} = 14.$$

BaO, avec la première molécule, subit une contraction de 12 c. c., et comme BaO a une action double sur 2HCl que Na_2O et K_2O, nous devons prendre $12 \times 2 = 24$; la contraction de 2HCl avec la première molécule d'eau est comme précédemment égale à 9; nous aurons par conséquent

$$24 - 9 = 15.$$

Donc, la contraction totale subie en dissolvant une molécule de $BaCl_2$ dans 900 grammes d'eau sera

$$15 + 14 = 29.$$

Ce nombre 29 est sensiblement égal à 28,5 donné par Hagemann, Favre et Valson.

Nous ne pouvons pas faire les mêmes vérifications pour $CaCl^2$ et $SrCl^2$, parce que nous ne connaissons pas la contraction subie par CaO et SrO avec la première molécule d'eau, tandis que pour Na_2O, K_2O, BaO, H_3N cette contraction était donnée par G.-A. Hagemann.

Nous voyons par ce qui précède qu'il y a une relation entre la contraction subie par le sel et les contractions éprouvées par les parties composantes du même sel, le sel et ses parties composantes étant dissous dans la même quantité d'eau.

Cette relation n'est pas aussi simple que la relation de Hagemann pour les sulfates et azotates; pour ces derniers, il n'y a pas production de molécule d'eau, tandis que dans les combinaisons précédentes, la formation des chlorures était accompagnée d'une molécule d'eau.

Reprenons les observations que nous avons faites en écrivant sur une colonne les différents sels employés, sur une seconde

colonne les valeurs des coefficients *c* correspondants, et sur une troisième colonne les poids moléculaires. Nous avons le tableau suivant :

SELS.	*c*	POIDS MOLÉCULAIRES.
—	—	—
NaCl	0,00183	58,5
KCl	0,00150	74,5
NH_4CL	−0,00042	53,5
CeCl	0,00022	168,5
$MgCl^2$	0,00144	95
$CdCl^2$	0,00114	183
$BaCl^2$	0,00145	208
$SrCl^2$	0,00192	157,5
$CaCl^2$	0,00266	111
$CuCl^2 + 2H_2O$	0,00122	170,5
$ZnCl^2$	0,00244	136
NaBr	0,001	103
KBr	0,00084	119
Na_2CO_3	0,0043	106
K_2CO_3	0,0029	138
N_2O_6Ca	0,00168	164
N_2O_6Sr	0,00152	211
N_2O_6Ba	0,00119	262
NaI	0,00049	150
KI	0,00065	166
LiI	−0,00087	134
N^2O^6Zn	0,00039	189
N_2O_6Cu	0,00084	187,5

Si nous considérons les sels d'une même catégorie, nous constatons que le coefficient *c* diminue à mesure que le poids moléculaire des sels augmente.

Dans le tableau ci-dessus, il y a exception pour l'iodure de sodium NaI et l'iodure de potassium KI, mais observons que KI a été séché avant d'être employé, ce qui n'a pas eu lieu pour NaI.

Nous pourrons donc dire que pour les sels d'une même série, les coefficients c sont inversement proportionnels aux poids moléculaires des sels.

Voici quelques vérifications :

Pour NaCl et KCl, $\frac{C}{C'} = \frac{0,00183}{0,00150} = 1,22$, $\frac{P'}{P} = \frac{74,5}{58,5} = 1,27$.

Pour $CaCl^2$ et $BaCl^2$, $\frac{C}{C'} = \frac{0,00266}{0,00145} = 1,84$, $\frac{P'}{P} = \frac{208}{111} = 1,88$.

Pour $CaCl^2$ et $SrCl^2$, $\frac{C}{C'} = \frac{0,00266}{0,00192} = 1,38$, $\frac{P'}{P} = \frac{157\,5}{111} = 1,43$.

Pour $NaCO_3$ et KCO_3, $\frac{C}{C'} = \frac{0,0043}{0,0029} = 1,48$, $\frac{P'}{P} = \frac{138}{106} = 1,31$.

Pour N_2O_6Ca et N_2O_6Sr, $\frac{C}{C'} = \frac{0,00168}{0,00152} = 1,11$, $\frac{P'}{P} = \frac{211}{164} = 1,28$.

Pour N_2O_6Ca et N_2O_6Ba, $\frac{C}{C'} = \frac{168}{119} = 1,41$, $\frac{P'}{P} = \frac{262}{164} = 1,6$.

Nous voyons que les nombres qui expriment ces rapports sont peu différents, et nous pouvons considérer la loi comme exacte.

Voici, croyons-nous, les conclusions, autres que celles formulées par Favre et Valson, G.-A. Hagemann et Heritsch, que nous pouvons tirer de ce travail :

1° Lorsque la masse d'eau de dissolution reste constante, les changements de volume des sels dissous sont directement proportionnels aux quantités pour cent de sels employées.

Ceci est un cas particulier de l'expression donnée par Heritsch

$$\delta = \frac{Amm_1}{m + m_1}$$

et que nous avons transformée plus haut.

Cette loi a été exprimée sur le diagramme par une droite, en prenant $10p$ (p = quantité °/₀ en poids) comme abscisse et $108v$ (v = changement de volume) comme ordonnée.

2° Les coefficients c de l'expression

$$\delta = c(100 - p)p$$

sont inversement proportionnels aux poids moléculaires des sels.

3° Les contractions éprouvées par les chlorures en se dissolvant, peuvent aussi s'exprimer en fonction des énergies de contraction des parties composant ces chlorures.

Nouvelles déterminations de la chaleur dégagée pendant la dissolution des sels.

Comme suite aux considérations précédentes sur le changement de volume des sels en passant de l'état solide à l'état de dissolution, nous allons nous occuper de la chaleur dégagée ou absorbée pendant ces dissolutions des sels.

L'appareil que nous avons employé se compose de trois enveloppes, comme l'indique la figure ci-contre. La dissolution des sels se fait dans l'enveloppe intérieure, les deux autres servant seulement à préserver la troisième du rayonnement extérieur.

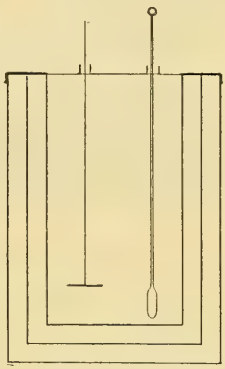


Fig. 2.

L'appareil est muni aussi d'un agitateur et d'un thermomètre mesurant la température à $^1/_5$ de degré près.

Nous avons toujours employé la même quantité d'eau pour toutes les observations, mais la quantité de sel variait.

Le volume d'eau employé pour chaque observation a été pris égal à 130 c. c.

Nous allons donner maintenant les résultats trouvés et les conséquences que nous croyons en pouvoir déduire.

Chlorure de sodium. — NaCl.

P	p	c	c'
—	—	—	—
11gr,826	8,34 %	- 195	- 137,5
10,971	7,78	- 175,5	- 124,5
7,301	5,32	- 130	- 94,7
5,623	4,15	- 104,5	- 77

Dans la colonne P se trouvent indiqués les poids en grammes de sel employé ; la seconde colonne contient les quantités pour cent de sel dans 130 c. c. d'eau ; la troisième colonne contient le nombre de calories dégagées par la dissolution de la quantité de sel correspondante, et, enfin, la quatrième nous donne les calories dégagées pour 100 grammes de la solution.

Les nombres des colonnes c et c' indiquent de petites calories; par conséquent, nous nommons ici calorie, la quantité de chaleur nécessaire pour élever d'un degré de température 1 c. c. d'eau.

Voici les conséquences que nous pouvons tirer du tableau ci-dessus :

Les nombres de la colonne °/₀ sont directement proportionnels aux nombres correspondants de la colonne c.

En effet, nous avons

$$8{,}34 : 7{,}78 = 1{,}072, \qquad 195 : 175{,}5 = 1{,}1,$$
$$7{,}78 : 5\,82 = 1{,}45, \qquad 175{,}5 : 130 = 1{,}35.$$

On peut donc voir que les rapports de ces nombres sont sensiblement égaux, à un dixième près tout au plus (à cause des erreurs d'observation, ou de ce que le thermomètre employé donne seulement le $^1/_5$ de degré).

Donc, nous pouvons dire que lorsque la quantité d'eau employée pour dissoudre le sel est constante, il y a un rapport sensiblement constant entre les nombres exprimant la quantité pour cent de sel employé et la chaleur dégagée.

La relation existant entre les pour-cent et les nombres de la deuxième colonne est

$$c' = k(100 - p)p,$$

k étant une constante. Cette dernière équation étant mise sous la forme

$$y = k(100 - x)x,$$

définit une parabole tout à fait comme il existe une parabole pour le changement de volume.

La valeur de k sera donnée par

$$-137,5 = k(100 - 8,34)\,8,34,$$

d'où

$$k = \frac{-137,5}{764,44} = -0,18.$$

Donc, si nous prenons les nombres de la colonne pour cent pour abscisse et les nombres correspondants de la colonne c' pour ordonnée, les points ainsi obtenus se trouvent sur une parabole ayant pour équation

$$y_1 = -0,18(100 - x)x.$$

Par conséquent, le rapport existant entre le nombre exprimant la chaleur dégagée ou absorbée et le nombre exprimant le changement de volume, pris tous les deux pour une même concentration, est donc

$$\frac{y_1}{y} = \frac{-0,18}{-0,00183} = 100 \text{ pour NaCl};$$

y_1 = chaleur absorbée pour une concentration x de 100 gr. de la dissolution ;

y = diminution de volume pour une même concentration x de 100 grammes de la dissolution.

Chlorure de potassium. — KCl.

P	p	c	c'
—	—	—	—
11gr,712	8,26 %	- 663	- 468
10,862	7,71	- 598	- 424,5
8,639	6,23	- 487,5	- 352
5,072	3,75	- 266	197

Les nombres de la colonne p sont proportionnels à ceux de la colonne c, car nous avons

$$8,26 : 7,71 = 1,07, \qquad 663 : 598 = 1,11,$$
$$7,71 : 6,23 = 1,24, \qquad 663 : 487,5 = 1,36.$$

Le coefficient constant k pour ce sel est donné par

$$-468 = k(100 - 8{,}26)8{,}26 = 757{,}77\,k.$$

d'où

$$k = -0{,}617.$$

Or, pour KCl, on a $y = -0{,}0015\,(100 - x)\,x =$ changement de volume de 100 grammes de concentration x.

En même temps, $y_1 = -0{,}617\,(100 - x)\,x =$ chaleur dégagée par 100 grammes de solution de la même concentration x.

Donc

$$\frac{y_1}{y} = \frac{-0{,}617(100 - x)x}{-0{,}00150(100 - x)x} = \frac{0{,}617}{0{,}00150} = 411.$$

Chlorure d'ammonium. — NH^4Cl.

P	p	c	c'
—	—	—	—
7gr,715	5,6 %	- 533	- 387
5,458	4,03	- 364	- 268,5
2,776	2,08	- 195	- 148,5

Comme précédemment, les nombres de la colonne des pour-cent sont proportionnels à ceux de la colonne c

$$5{,}60 : 4{,}03 = 1{,}39, \qquad 533 : 364 = 1{,}46.$$

Le coefficient constant k pour ce sel sera donné par l'expression

$$-387 = k(100 - 5{,}60)5{,}60 = 528{,}64k,$$

d'où

$$k = -0{,}732.$$

Or, nous avons trouvé pour changement de volume de 100 grammes de NH^4Cl de concentration x :

$$y = 0{,}00042(100 - x)x.$$

La chaleur dégagée y_1 pour 100 grammes de solution de la même concentration x est

$$y_1 = -0{,}732(100 - x)x,$$

$$\frac{y_1}{y} = \frac{-0{,}732(100-x)x}{0{,}00042(100-x)x} = \frac{-0{,}732}{0{,}00042} = -1743.$$

Le rapport entre y_1 et y est par conséquent négatif pour ce sel, tandis que pour les deux sels précédents il était positif.

Les chlorures de sodium et de potassium ont été fondus au creuset, le NH_4Cl a été employé tel.

Chlorure de calcium. — $CaCl_2$.

P	p	c	c'
—	—	—	—
15gr,700	10,8 %	2327	1597
14,121	9,8	2028	1407
11,030	7,82	1794	1278,5
6,912	5,05	1027	750

Comme rapport entre les nombres p et c, nous avons

$$10{,}8 : 9{,}8 = 1{,}10, \qquad 2327 : 2028 = 1{,}14.$$

Nous aurons pour valeur du coefficient k

$$1597 = k(100 - 10{,}8)10{,}8 = 963{,}4\,k, \quad \text{d'où} \quad k = 1{,}65.$$

Le rapport entre y_1 et y sera donc

$$\frac{y_1}{y} = \frac{1{,}65(100-x)x}{-0{,}00266(100-x)x} = \frac{1{,}65}{-0{,}00266} = -620.$$

Chlorure de strontium. — $SrCl_2$.

P	p	c	c'
—	—	—	—
13gr,381	9,33 %	871	607,5
10,003	7,14	643,5	459,6
6,556	4,80	435,5	318,5
4,982	3,69	318,5	236

Par ce tableau, nous voyons que le rapport entre les nombres correspondants des colonnes p et c est le même, car nous avons

$$9{,}33 : 7{,}14 = 1{,}30, \qquad 871 : 643{,}5 = 1{,}35.$$

La valeur du coefficient k pour ce sel sera donnée par

$$607{,}5 = k(100 - 9{,}33)9{,}33, \quad \text{d'où} \quad k = 0{,}718.$$

Le rapport entre y_1 et y sera donc

$$\frac{y_1}{y} = \frac{0{,}718(100 - x)x}{-\,0\,00192(100 - x)x} = -\,374.$$

Chlorure de baryum. — $BaCl_2$.

P	p	c	c'
14gr,466	10,01 %	143	99
10,499	7,47	104	74
7,186	5,24	78	57,6
3,326	2,49	39	29,2

Nous avons encore

$$10{,}01 : 7{,}47 = 1{,}34, \qquad 143 : 104 = 1{,}37.$$

La valeur du coefficient k pour ce sel sera

$$99 = k(100 - 10{,}01)10{,}01, \quad \text{d'où} \quad k = 0{,}109.$$

Par conséquent, le rapport entre y_1 et y sera

$$\frac{y_1}{y} = \frac{0{,}109(100 - x)x}{0{,}00145(100 - x)x} = -\,75.$$

Chlorure de zinc. — $ZnCl_2$.

P	p	c	c'
12gr,650	8,87 %	1196	838,4
8,982	6,46	871	626,7
5,503	4,06	540	398,5

La proportionnalité entre les nombres des colonnes p et c existe encore comme pour les sels précédents.

La valeur du coefficient k pour $ZnCl^2$ nous sera donnée par l'expression

$$838,4 = k(100 - 8,87)\,8,87, \quad \text{d'où} \quad k = 1,037.$$

Le rapport entre la chaleur dégagée et le changement de volume pour 100 grammes à la même concentration sera donc

$$\frac{y_1}{y} = \frac{1\,037(100 - x)x}{-\,0,00244(100 - x)x} = -\,\frac{1,037}{0,00244} = -\,425.$$

Chlorure de cadmium. — $CdCl^2$.

P	p	c	c'
15gr,137	10,43 %	253,5	174,66
10,881	7,72	169	120
7,137	5,20	117	85,3

Nous avons toujours comme précédemment

$$7,72 : 5,20 = 1,48, \qquad 169 : 117 = 1,44,$$

et l'on obtient

$$k = 0,168.$$

Le rapport entre y_1 et y sera donc

$$\frac{y_1}{y} = \frac{0,168(100 - x)x}{-\,0,00114(100 - x)x} = -\,147.$$

Nous terminons ici la série des chlorures; tous les sels précédents ont été fondus au creuset, à l'exception du chlorure d'ammonium qui se décompose par la chaleur.

Bromure de sodium. — NaBr.

P	p	c	c'
13gr,509	9,41 %	-65	-45,3
7,943	5,76	-39	-28,3
4,893	3,63	-24	-17,5

Les mêmes calculs que pour les sels précédents nous donnent toujours

$$9{,}41 : 5{,}76 = 1{,}63, \qquad 65 : 39 = 1{,}66,$$
$$5{,}76 : 3{,}63 = 1{,}6, \qquad 39 : 24 = 1{,}62.$$

La valeur du coefficient k sera donnée par

$$-45{,}3 = k(100 - 9{,}41) \times 9{,}41 = 852{,}45\,k,$$

d'où

$$k = -0{,}053.$$

Le rapport entre la chaleur dégagée et le changement de volume, pour une même concentration de 100 grammes de solution, sera pour ce sel :

$$\frac{y_1}{y} = \frac{-0{,}053(100 - x)x}{-0{,}001(100 - x)x} = 53.$$

Bromure de potassium. — KBr.

P	p	c	c'
—	—	—	—
13gr,200	9,22	-481	-335,9
8,748	6,30	-325	-234,2
3,736	2,79	-143	-106,9

Le même rapport que précédemment est toujours vérifié, car nous avons

$$9{,}22 : 6{,}30 = 1{,}46, \qquad 481 : 325 = 1{,}48,$$
$$6{,}30 : 2{,}79 = 2{,}26, \qquad 325 : 143 = 2{,}27.$$

Le coefficient k aura pour valeur — 0,574.

Le rapport entre la chaleur dégagée et le changement de volume sera

$$\frac{y_1}{y} = \frac{-0{,}574(100 - x)x}{-0{,}00084(100 - x)x} = 683{,}3.$$

Carbonate de sodium. — CO_3Na_2.

P	p	c	c'
—	—	—	—
10gr,060	7,18 °/°	325	232
6,633	4,85	208	152
3,870	2,89	130	97

Le coefficient k est tracé égal à 0,548, et l'on a

$$\frac{y_1}{y} = \frac{-0,348}{0,0043} = -81.$$

Carbonate de sodium hydraté.

P	p	c	c'
—	—	—	—
10gr,060	7,18 °/°	-434	-310
9,335	6,7	-409	-293,5
5,797	4,26	-266	-196

Le carbonate de sodium est employé hydraté, tandis que le précédent est anhydre.

Voici comment nous avons opéré pour déterminer le degré d'hydratation du dernier sel :

Une cuvette en porcelaine contient 10,060 grammes de carbonate de sodium hydraté. Au moyen du bec à gaz Bunsen, nous échauffons lentement, et lorsque toute l'eau d'hydratation est évaporée, nous laissons d'abord refroidir la cuvette et nous trouvons alors qu'elle ne contient plus que 3,255 grammes de CO_3Na_2 anhydre. La quantité d'eau de cristallisation évaporée est donc 10,60 — 3,255 = 6,805 grammes, donc un peu plus du double de 3,255.

Une molécule-gramme de CO_3Na_2 vaut 106 grammes et la moitié 53; une molécule d'eau H_2O vaut 18 grammes. Donc, $\frac{CO_3Na_2}{2}$ de sel anhydre et $6H_2O$ fournissent le même degré d'hydratation que le sel employé.

La formule chimique du CO_3Na_2 hydraté employé pour l'expérience est donc

$$\frac{CO_3Na_2}{2} + 6H_2O.$$

Par l'inspection des deux tableaux précédents, nous observons que 10,060 grammes de CO_3Na_2 anhydre *dégagent* 325 calories dans 130 grammes d'eau, tandis que CO_3Na_2 hydraté de formule chimique $\frac{CO_3Na_2}{2} + 6H_2O$ *absorbe* 434 calories dans les mêmes conditions de poids de sel et d'eau de dissolution employés. Cette différence ne peut provenir évidemment que de l'eau d'hydratation du sel.

Les 10,060 grammes de CO_3Na_2 hydraté se composent de 3,255 grammes de CO_3Na_2 anhydre et de 6,805 grammes d'eau.

Or, 3,235 grammes de sel anhydre dans 130 c. c. d'eau produisent une concentration de

$$\frac{3{,}255 \times 100}{130 + 3{,}255} = 2{,}44\ ^0/_0,$$

et dégagent une certaine quantité de chaleur x donnée par

$$\frac{7.18}{2{,}44} = \frac{325}{x},$$

d'où

$$x = 104 \text{ calories.}$$

Or, 3,225 grammes de CO_3Na_2 + 6,805 grammes d'eau absorbent 434 calories dans 130 c. c. d'eau; mais 3,225 grammes dégagent 104 calories dans 130 c. c. d'eau.

Par conséquent, la chaleur totale absorbée par les 6,805 gr. d'eau est

$$434 + 104 = 538 \text{ calories,}$$

d'où

$$1 \text{ gramme d'eau absorbe } \frac{538}{6{,}805} = 79{,}06 \text{ calories.}$$

Ce nombre 79,06 est très voisin du nombre 79,25 qui exprime la chaleur de fusion de la glace. Nous arrivons donc à cette

conclusion : L'eau d'hydratation d'un sel se comporte dans celui-ci comme le ferait la glace. On pourrait donc dire aussi que l'eau d'hydratation d'un sel se trouve à l'état de glace.

Nous pourrions résoudre aussi le problème inverse, c'est-à-dire, sachant que l'eau d'hydratation d'un sel se comporte comme la glace, sachant, en outre, que 10,060 grammes de CO_3Na_2 anhydre et hydraté dégagent respectivement 325 calories et — 434 calories dans 130 c. c. d'eau, nous pouvons trouver la quantité de sel anhydre qui se trouve dans les 10,060 grammes de CO_3Na_2 hydraté.

Voici la solution du problème : On trouve facilement que la quantité de sel anhydre qui est contenue dans les 10,060 gr. de CO_3Na_2 cristallisé est 3,21, nombre très voisin de 3,25 donné par l'expérience (le calorique de fusion de la glace étant pris égal à 79,25).

Carbonate de potassium. — CO_3K_2.

P	*p*	*c*	*c'*
—	—	—	—
11gr,340	8,02 %	461,5	326,5
7,850	5,69	312	226,3
5,913	4,35	227	167

Nous avons toujours comme précédemment

$$8,02 : 5,69 = 1,41, \qquad 461,5 : 312 = 1,48,$$
$$5,69 : 4,35 = 1,31, \qquad 312 : 227 = 1,3.$$

Le coefficient k pour ce sel sera

$$3265\,k(100 - 8,02)8,02, \quad \text{d'où} \quad k = 0,442.$$

Azotate de calcium. — N_2O_6Ca.

P	*p*	*c*	*c'*
—	—	—	—
13gr,095	9,15 %	210	146,7
7,993	5,79	130	94,2

La proportionnalité entre les nombres p et c existe toujours; la valeur du coefficient k nous est donnée par

$$146{,}7 = k(100 - 9{,}15) \times 9{,}15, \quad \text{d'où} \quad k = 0{,}176.$$

Azotate de strontium. — N_2O_6Sr.

P	p	c	c'
14gr,71	10,16 %	-260	-180
10,628	7,55	-185	-131

La proportionnalité entre les nombres p et c existe encore, car nous avons

$$10{,}16 : 7{,}55 = 1{,}34, \qquad 260 : 185 = 1{,}41,$$

et l'on trouve

$$k = -0{,}197,$$

puis

$$\frac{y_1}{y_2} = 130.$$

CONCLUSIONS.

1° Lorsque la masse d'eau de dissolution reste constante, la chaleur dégagée par la dissolution des sels est directement proportionnelle aux quantités pour cent de sels employées.

Nous avons vérifié cette loi à la suite de chaque tableau dressé précédemment.

2° Il en résulte que lorsque le poids de la solution reste constant et est égal à 100 grammes, par exemple, la relation entre la chaleur dégagée c' et la quantité pour °/₀ p est la suivante :

$$c' = k(100 - p)p ;$$

elle est de forme parabolique ;

3e Le coefficient k de la dernière expression diminue lorsque le poids moléculaire de sel augmente, ceci dit pour les sels d'une même série soit alcalins, soit alcalino-terreux, par exemple. Les trois conclusions précédentes sont tout à fait semblables à celles que nous avons formulées relativement au changement de volume par voie de dissolution des sels.

Les différentes valeurs du coefficient k sont les suivantes :

SELS.	k	POIDS MOLÉCULAIRES.
—	—	—
NaCl	- 0,18	58,5
KCl	- 0,617	74,5
NH_4Cl	- 0,732	53,5
$CaCl^2$	1,65	111
$SrCl^2$	0,718	158
$BaCl^2$	0,109	208
$ZnCl^2$	1,037	136
$CdCl^2$	0,168	183
NaBr	- 0,53	103
KBr	- 0,574	119
CO_3Na	0,348	106
N_2O_6Ca	0,176	164
N_2O_6Sr	- 0,197	211

4° Pour un même poids de 100 grammes de la solution et pour un même sel, il existe un rapport constant entre la chaleur dégagée et le changement de volume.

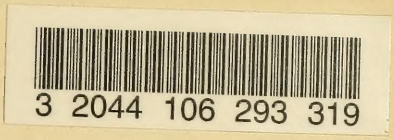
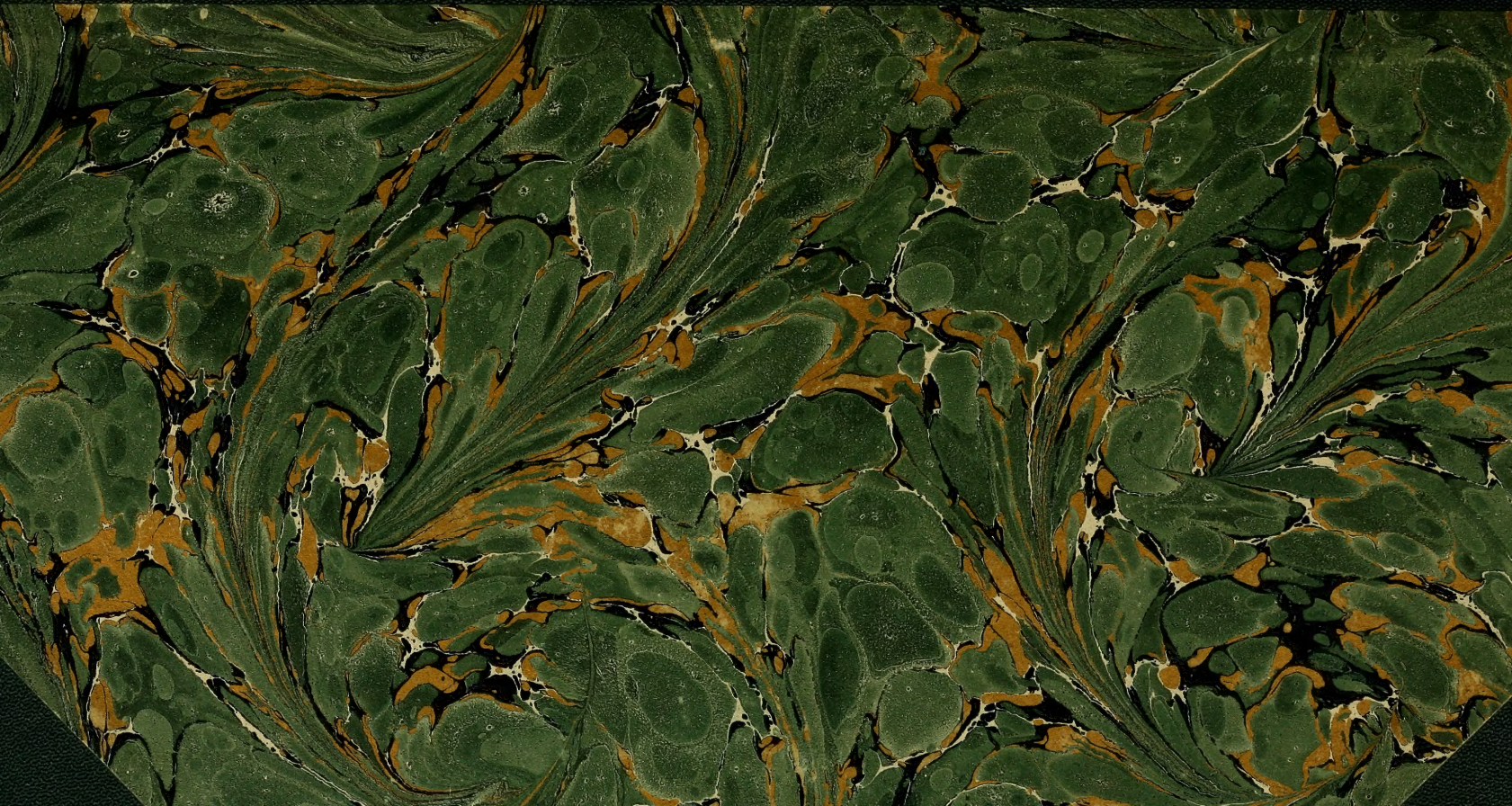
Cela résulte des expressions suivantes :

$$y = c(100 - p)p, \qquad y = \text{changement de volume},$$
$$y_1 = k(100 - p)p, \qquad y_1 = \text{chaleur dégagée},$$

donnant

$$\frac{y_1}{y} = \frac{k}{c} = \text{constante};$$

5° Nous avons vérifié aussi que l'eau d'hydratation d'un sel se comporte comme le ferait la glace.


3 2044 106 293 319